Trabajo Fin de Máster

FUNCIONES: Una propuesta didáctica en 2º de ESO

FUNCTIONS: a didactic proposal in 2nd ESO Mathematics

Autora

Angélica María Santos Troncoso

Director

Rafael Escolano Vizcarra

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2019 – 2020

Contenido

A. Definición del objeto matemático a enseñar

Se enseñará el objeto matemático conocido como “funciones”, ubicado dentro del bloque 4 de currículo de matemáticas de 2º de ESO, que establece la orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, cuyos contenidos son:

- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.
- Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas

En la misma orden se denotan los criterios de evaluación así como los estándares de aprendizaje evaluables que además tendremos en cuenta en este trabajo, los cuales se citan a continuación:

Crit.MA. 4.1. Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas.

Est.MA.4.1.1. Localiza puntos en el plano a partir de sus coordenadas y nombra puntos del plano escribiendo sus coordenadas.

Crit.MA.4.2. Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto.

Est.MA.4.2.1. Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto.

Crit.MA.4.3. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.

Est.MA.4.3.1. Reconoce si una gráfica representa o no una función.

Est.MA.4.3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características.

Crit.MA.4.4. Reconocer, representar y analizar las funciones lineales, utilizándolas para resolver problemas.
Est.MA.4.4.1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente
Est.MA.4.4.2. Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o tabla de valores.
Est.MA.4.4.3. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal existente entre dos magnitudes y la representa.

Est.MA.4.4.4. Estudia situaciones reales sencillas y, apoyándose en recursos tecnológicos, identifica el modelo matemático funcional (lineal o afín) más adecuado para explicarlas y realiza predicciones y simulaciones sobre su comportamiento.

B. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

Con el objetivo de analizar las prácticas más habituales de enseñanza se realizará un análisis de algunos libros de texto y ciertos artículos de investigación, que a continuación se detallan:

Cólera, J., y Gaztelu, I. (2003). Educación Secundaria 2. Matemáticas. En J. Cólera, e I. Gaztelu, Educación Secundaria 2. Matemáticas (págs. 244-261). Valdemoro (Madrid): ANAYA.

Corbalán, F., Álvarez, J. L., Fernández-Aliseda, A., González, A. E., Hans, J. A., Muñoz, J., y otros. (2003). Alfa 2 Matemáticas. En F. Corbalán, J. L. Álvarez, A. Fernández-Aliseda, A. E. González, J. A. Hans, J. Muñoz, y otros, Alfa 2 Matemáticas (págs. 198-253). Barcelona: Vicens Vives.

Ferro, P., Álvarez Gascón, M., y Manguan Esteban, S. (2016). Matemáticas 2 ESO. Bloque II: Geometría. Funciones. Estadística y probabilidad. En P. Ferro, M. Álvarez Gascón, y S. Manguan Esteban, Matemáticas 2 ESO. Bloque II: Geometría. Funciones. Estadística y probabilidad. (págs. 289-317). Barcelona: EDEBÉ.

Vizmanos, J., Anzola, M., Peralta, J., y Bargueño, J. (2002). Matemáticas GAUSS 2º secundaria. En J. Vizmanos, M. Anzola, J. Peralta, y J. Bargueño, Matemáticas GAUSS 2º secundaria (págs. 146-161). Getafe: SM.

Para fundamentar la propuesta de enseñanza vamos a tener en cuenta los trabajos de investigadores que proponen organizar la enseñanza planteando a los alumnos situaciones de modelización en las que aparezcan de modo natural traslaciones entre las diferentes representaciones de la función que modeliza la situación problemática. Para Deulofeu (2001, p. 371) “la formación del concepto de función pasa en gran medida por la relación que se establece entre los distintos lenguajes de representación de las funciones, de los cuales, el numérico (presentación de las funciones en forma de tablas) es el más elemental (aunque también el más limitado) y el gráfico el que permite un tratamiento más amplio y versátil.

Para organizar los campos de problemas vamos a utilizar el esquema de interacciones, ya clásico, propuesto por Janvier (1987) que para el aprendizaje de la función propone establecer relaciones entre las representaciones verbal (texto), numérica (tabla), gráfica (gráfica cartesiana) y algebraica (fórmula) de una función de acuerdo con el siguiente esquema:

HACIA / DESDE	DESCRIPCIÓN VERBAL	TABLA	GRÁFICA	FÓRMULA
DESCRIPCIÓN VERBAL	—	Medida	Boceto	Modelo
TABLA	Lectura	—	Trazado	Ajuste
GRÁFICA	Interpretación	Lectura	—	Ajuste
FÓRMULA	Interpretación	Cómputo	Gráfica	—

Imagen 1. Traslaciones entre diferentes representaciones de una función.

Para analizar los libros de texto vamos a tener en cuenta los trabajos de Janvier (1987), Azcárate y Deulofeu (1998), Deulofeu (2001), los trabajos del Shell Centre of Mathematical Education. (1985) y las sugerencias que recogen Burgos y Flores (2017, p. 71), a partir de la revisión bibliográfica que realizan estos investigadores para orientar las prácticas de enseñanza:

"• El estudio y representación de funciones requiere dos procesos no necesariamente consecutivos, que tienen que coordinarse. Por un lado el paso de la expresión algebraica a la determinación de características -con repercusión gráfica; por otro, la identificación de la repercusión gráfica en el registro algebraico, y la coordinación entre los aspectos parciales.

• La interpretación de las características de una función a partir de su gráfica es una actividad decisiva para lograr la coordinación anterior, que se realiza de manera poco frecuente en la enseñanza.

• Motivar por parte de los estudiantes el uso de estrategias basadas en la intuición, en el sentido común y la interpretación de situaciones de la realidad, ayuda a los estudiantes a mirar la gráfica de forma global como una expresión de la relación entre dos cantidades mutuamente cambiantes.

• Poder interpretar con soltura una gráfica, apreciarla como un registro que suministra información sobre el fenómeno, más allá de considerarla solo como la plasmación de las cualidades obtenidas mediante el proceso formal de obtención de los elementos que se usan para estudiar las funciones (dominio, continuidad y asíntotas, extremos, monotonía, curvatura,..) requiere de una serie de pasos de gran complejidad cognitiva: diferenciar elementos aislados y comparar unos con otros en funciones discretas, apreciar variaciones conjuntas, extremos y sus transiciones, en procesos continuos, etc. Es importante tomar conciencia de qué información en una gráfica requiere por parte del aprendiz, haber interiorizado esta serie de pasos".

B1. Justificación de la introducción escolar de las funciones

Dada la estructura de los cuatro libros de texto analizados, la metodología implícita es la expositiva – participativa. Es a este tipo de metodología que el alumnado suele estar acostumbrado, no se inculca la innovación ni los juegos, en tal caso el único libro que realiza una propuesta más innovadora es el libro 2 de la editorial Vicens Vives.

Intentaremos descubrir si en los siguientes textos se mantiene la enseñanza formal que prioriza las manipulaciones simbólicas al trabajar, casi de forma exclusiva, el paso de representaciones algebraicas y tabulares a representaciones gráficas. Bajo mi opinión, no se captura la atención suficiente del alumnado, lo que desencadena un bajo interés en los contenidos que se pretender abordar.

En el libro 1, de ANAYA, se introduce la unidad 13 *Funciones* con una reflexión, en la que se enuncia que "unos buceadores han medido la temperatura y la presión a diferentes profundidades". Se muestran las siguientes gráficas

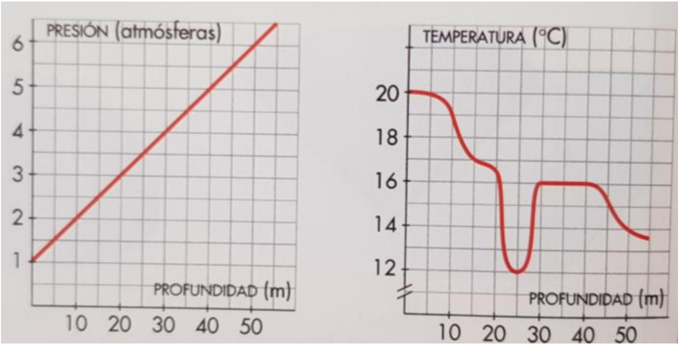


Imagen 2. Graficas introductorias del tema de Funciones en ANAYA

A partir de ello se realizan diferentes preguntas, como cuál es la presión y la temperatura a diferentes metros de profundidad.

A continuación y una vez finalizada la actividad de *reflexiona*, se recuerda qué son los ejes cartesianos y las coordenadas de un punto, rememorando cómo se llama el eje vertical (eje de ordenadas) y el eje horizontal (eje de abscisas); de igual forma se recuerda que un punto en un plano se designa por sus dos coordenadas (x, y).
En una gráfica, y para trabajar en esto, se ofrecen 8 puntos y se pide que los representen, y viceversa.

Por último y a partir de una gráfica se pide que describan lo que ha sucedido, iniciando el autor el enunciado. "Bajamos rápidamente a 15m. Estuvimos unos 15min, aproximadamente a esa profundidad. Después…"

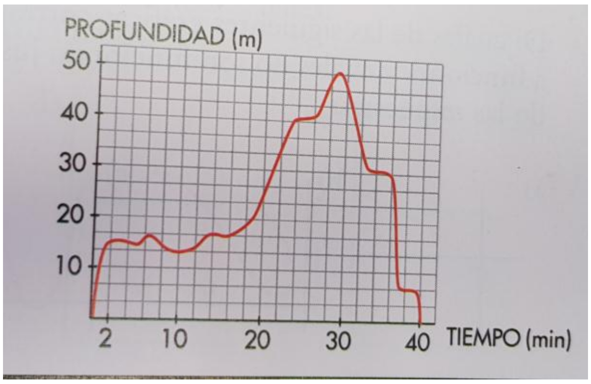


Imagen 3. Gráfica que muestra la profundidad a la que se sumergen con respecto del tiempo.

El texto se sirve de la representación gráfica de funciones para repasar los conceptos de coordenadas cartesianas, la representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados, y la relación entre variable dependiente e independiente que los alumnos estudiaron en el primer curso de ESO.

Se introduce la definición de función mediante un ejercicio que aborda la lectura de gráficas, una vez se ha trabajado, se repasa el concepto de coordenadas y ejes, y por último, y como más interesante esta actividad en la que deben interpretar la gráfica, es decir, saber enunciar lo que en ella se representa. El texto opta por una enseñanza formal que Deulofeu denomina "representación punto a punto" caracterizada por la ausencia de situaciones problemáticas de modelización y por una escasa interacción entre las representaciones de las funciones descritas., a lo largo de la unidad solo se trabaja la interpretación, la lectura y la construcción de tablas, siguiendo un trabajo meramente procedimental y eludiendo las interpretaciones cualitativas de las funciones que ejemplifica el libro de texto la interpretación cualitativa de algunos fenómenos.

En el libro 2, de Vicens Vives, para *Funciones y gráficas* se dedican 3 unidades, la 11, la 12 y la 13. En cada unidad se proponen una serie de preguntas, para acercar el tema dados los posibles usos que le han dado previamente.

- Tema 11. Coordenadas cartesianas. Tablas y gráficas.

Inicialmente se cuestiona si conocen la notación precisa para señalar cada cuadro del tablero de ajedrez, o si han jugado alguna vez a batalla naval y la última pregunta indaga si han manejado la latitud y la longitud en el atlas.

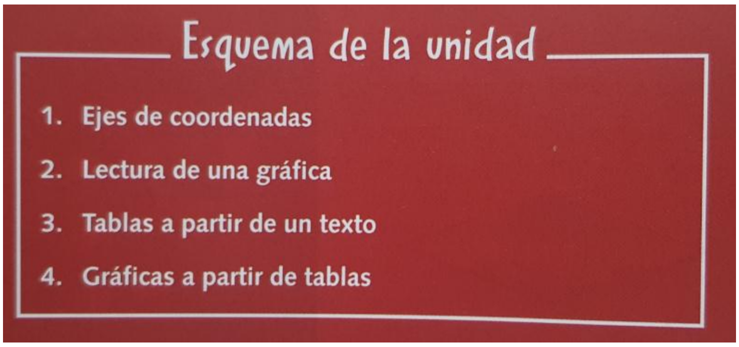


Imagen 4. Esquema de la unidad 11

Según el esquema de la unidad se intenta trabajar algunas traslaciones entre sistemas de representación. En concreto el boceto, la gráfica, el modelo, la medida y el trazado.

Se proponen una serie de juegos para asegurar el aprendizaje de la técnica de representación de coordenadas cartesianas que consiste en darles un mapa y unas indicaciones, y se les pide encontrar el tesoro que han escondido unos piratas.

Para abordar la lectura de gráficas se parte desde los ejes con graduación oculta hacía los ejes con graduación, siendo las del primer tipo más interesantes, dado que se prestan a un razonamiento sobre la relación entre las magnitudes implicadas, y sobre todo a quizá abrir algún tipo de discusión en el aula. Por ejemplo, podrían decir sobre Luis que es muy alto y delgado, Manuel por el contrario no es tan alto como Luis y en cambio su peso es elevado, del resto podrían decir que tienen un índice de masa corporal similar (IMC), pues guardan cierta proporcionalidad y el IMC tiene en cuenta la estatura y el peso.

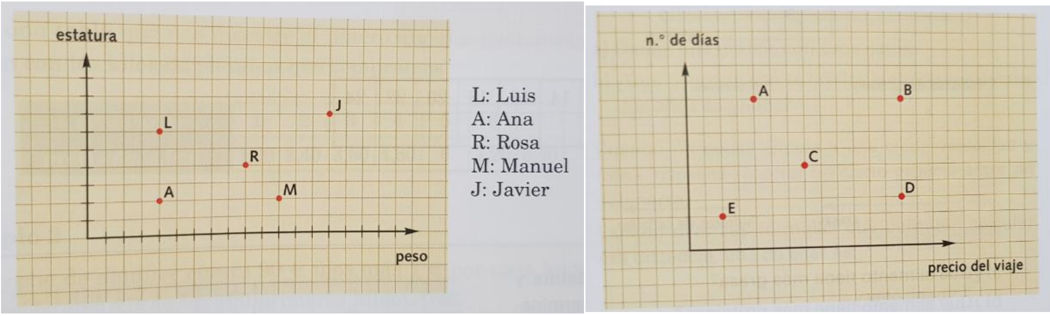
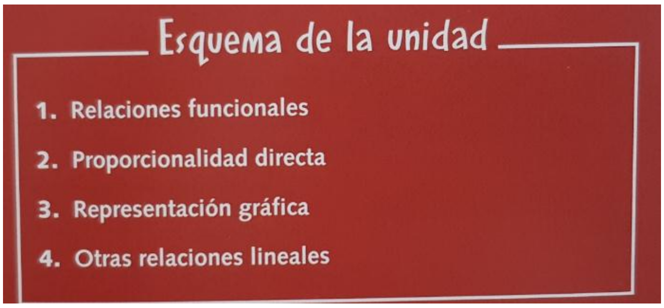


Imagen 5. Ejercicios con graduación oculta.

- Tema 12. Relaciones funcionales entre magnitudes proporcionales.

En este tema se centra en la representación gráfica, observaremos si se trabaja algunas de las traslaciones entre sistemas de representación partiendo de la representación gráfica.



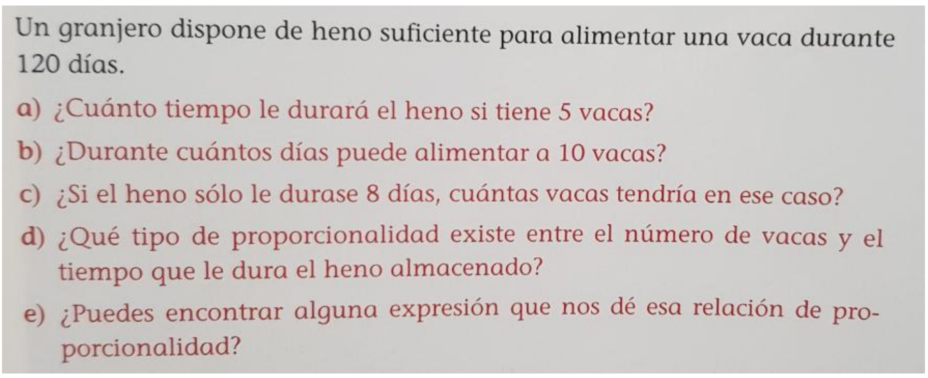
Esquema de la unidad

1. Relaciones funcionales
2. Proporcionalidad directa
3. Representación gráfica
4. Otras relaciones lineales

Imagen 6. Esquema de la unidad 12.

Introductoriamente, se pide a los alumnos que den ejemplos de casos en los que al aumentar una magnitud que está relacionada con otra, la otra también aumentará., así como situaciones en las que eso no suceda. La siguiente pregunta les afecta directamente, pues plantea “si en esta evaluación dedicas doble tiempo a una asignatura, ¿sacarás el doble de nota?” Estos ejemplos son adecuados para que los alumnos reflexionen sobre la dependencia de dos variables y para que perciban que hay diferentes relaciones funcionales y que no todas son directamente proporcionales.

A continuación se realizan unos acercamientos a situaciones reales como el llenado de un depósito de agua en función del tiempo, la alimentación del ganado en una granja en función de la cantidad de heno que hay disponible (aquí se maneja la proporcionalidad inversa, Imagen 7), la comisión de un vendedor en función del número de ventas y la distancia recorrida por un caminante en función del tiempo.

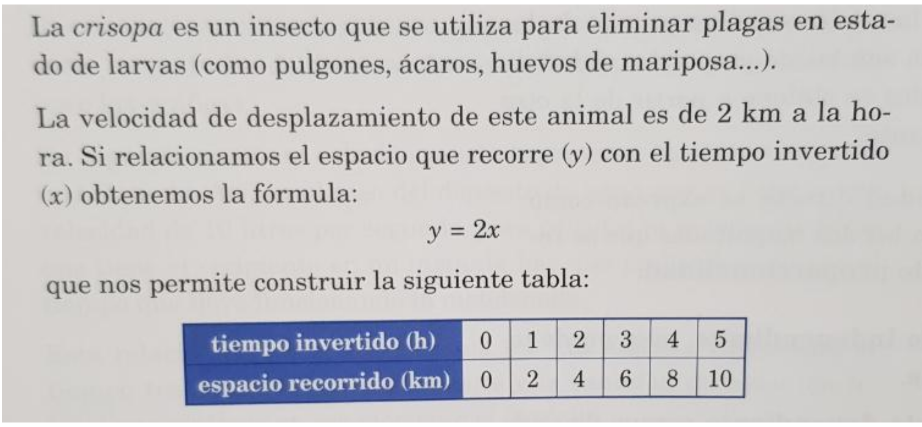


Un granjero dispone de heno suficiente para alimentar una vaca durante 120 días.

a) ¿Cuánto tiempo le durará el heno si tiene 5 vacas?
b) ¿Durante cuántos días puede alimentar a 10 vacas?
c) ¿Si el heno sólo le durase 8 días, cuántas vacas tendría en ese caso?
d) ¿Qué tipo de proporcionalidad existe entre el número de vacas y el tiempo que le dura el heno almacenado?
e) ¿Puedes encontrar alguna expresión que nos dé esa relación de proporcionalidad?

Imagen 7. Ejercicio razonamiento proporcionalidad inversa.

Otra potencialidad del texto radica en que la mayoría de los ejemplos aparecen contextualizados. A partir de un enunciado verbal solicita construir una tabla o la fórmula de la función, como en el ejemplo que se indica a continuación:



La *crisopa* es un insecto que se utiliza para eliminar plagas en estado de larvas (como pulgones, ácaros, huevos de mariposa...).

La velocidad de desplazamiento de este animal es de 2 km a la hora. Si relacionamos el espacio que recorre (y) con el tiempo invertido (x) obtenemos la fórmula:

$$y = 2x$$

que nos permite construir la siguiente tabla:

tiempo invertido (h)	0	1	2	3	4	5
espacio recorrido (km)	0	2	4	6	8	10

Imagen 8. Ejercicio resuelto, paso a paso para llegar a una gráfica.

- Tema 13. Gráficas.

En esta última unidad, se puede concluir que se va a trabajar todo aquello relacionado con la gráfica y su interpretación.

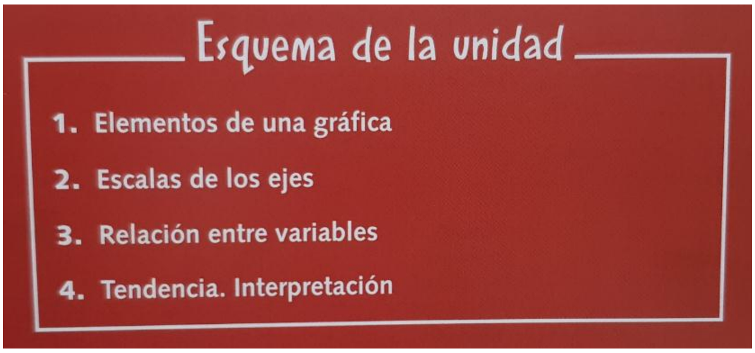


Imagen 9. Esquema de la unidad 13

Se realizan cuestiones sobre la representación de cantidades de magnitudes en los ejes de coordenadas, como si en ambos ejes se deben poner las mismas unidades de cantidades de magnitud o si tras haber elegido una unidad para un eje ésta se puede variar.

Se muestra la evolución del IPC entre dos períodos de tiempo, así pues se puede observar la evolución temporal y evaluar bajo los mandatos de qué presidente o qué eventualidades culturales han influido.

A lo largo de la unidad se observa una clara influencia de la propuesta “El lenguaje de funciones y gráficas” del Shell Centre for Mathematical Education, (1985). El libro de texto, de modo tímido, apuesta por un trabajo cualitativo de las funciones y no meramente procedimental. A modo de ejemplo, mostramos una actividad clásica propuesta en el Shell Centre (1990) para que los alumnos relacionen la magnitud velocidad de llenado de recipientes de diferentes formas en función del tiempo:

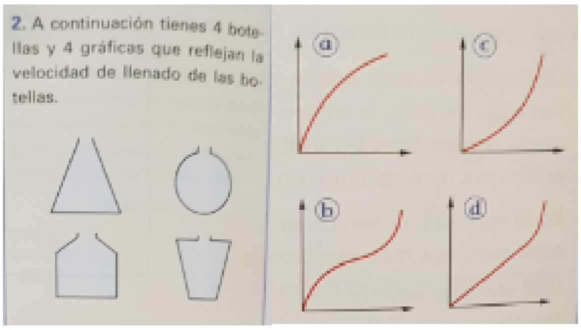


Imagen 10. Actividad de interpretación de gráficas de funciones.

En la Imagen 11, se muestra un tipo de ejercicio que además de relacionar el tipo de gráfica con un circuito, pide a los alumnos que para aquellos dos circuitos que no tienen relación con ninguna gráfica, sean ellos quienes propongan una gráfica para cada uno. En ambos ejemplos los ejes no indican la medida ni la graduación, son ellos quienes deben decidir a qué eje se le da cada una de las variables.

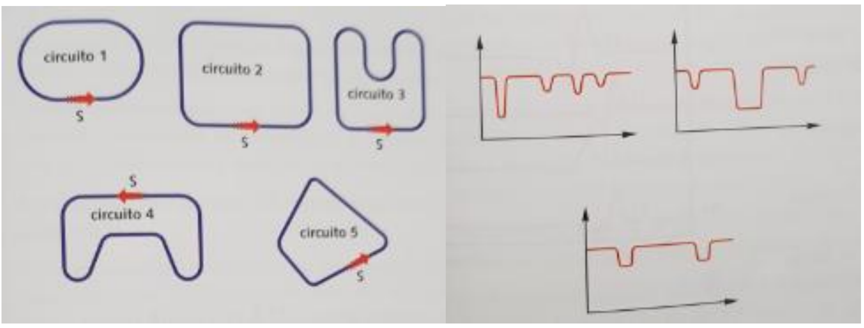
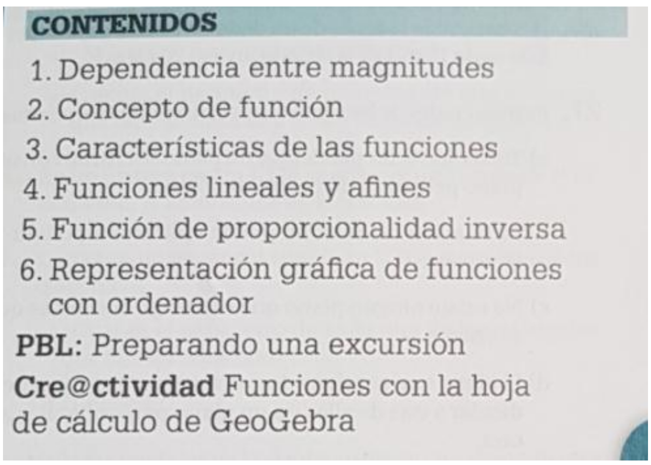


Imagen 11. Actividad de boceto de gráficas de funciones.

A modo de resumen este libro de texto que sorprendentemente está editado en 2003, se detecta una preocupación por trabajar aspectos cualitativos de las representaciones gráficas de funciones y por la interacción entre las representaciones de la función.

En el libro 3, de EDEBÉ, ofrece un pequeño esquema de los que se va a tratar en esta unidad y el orden que se propone seguir.


CONTENIDOS

1. Dependencia entre magnitudes
2. Concepto de función
3. Características de las funciones
4. Funciones lineales y afines
5. Función de proporcionalidad inversa
6. Representación gráfica de funciones con ordenador

PBL: Preparando una excursión

Cre@ctividad Funciones con la hoja de cálculo de GeoGebra

Imagen 12. Contenidos a trabajar en la unidad

El libro de texto incluye todos los contenidos curriculares, sin embargo la metodología es muy formal, no plantea problemas de tipo cualitativos, a pesar de ser el libro más reciente. Carece del razonamiento intuitivo, y se queda en la formalidad, obligando quizá, al alumnado a la adquisición del objeto de forma mecánica y memorística.

Se sigue una rutina de palabra – idea – frase, tras leer un breve texto (Imagen 13) se pide a los alumnos que elijan las palabras que les haya llamado la atención, cuál idea ha sido significativa y qué frase les ha ayudado a entender el enunciado. Una vez realizado esto se realiza una puesta en común. En la siguiente imagen tenemos el texto, un texto que apenas despierta el interés de un adulto, por lo que podemos suponer que para un adolescente va a ser aburrido.

Empleamos funciones para transformar la imagen y el sonido; para calcular precios o cambiar divisas; para hacer predicciones científicas o calcular cómo es de fácil que nos toque la lotería. Las funciones aparecen en múltiples campos del conocimiento y de nuestra vida cotidiana.

Imagen 13. Texto para extraer ideas, palabras y frases.

Las definiciones son muy formales, valga la redundancia, se puede observar para el caso de una gráfica de una función (Imagen 14), sigue esa misma línea de definición para trabajar las características de las funciones.

La **gráfica de una función** *f* es la representación en unos ejes de coordenadas cartesianas de todos los pares de la forma *(x, f(x))*, siendo *x* un valor de la variable independiente de la función.

Imagen 14. Definición de gráfica de una función.

Lo más innovador que propone este manual es que incluye el manejo de GeoGebra, esto es dada la actualidad del texto, y sobre todo a la disponibilidad de esta herramienta gráfica, gracias a su gratuidad.

Sin embargo, el texto no utiliza GeoGebra para resolver problemas, tan sólo indica que se pueden representar gráficas de funciones con este software. Por ejemplo, el texto indica cómo representar la función $f(x) = 4/x$. No obstante, hubiera sido más interesante modelizar esta función s partir del siguiente problema: “Con la ayuda de GeoGebra estudia qué relación hay entre las longitudes de los lados de un cercado rectangular de área constante e igual a 4 metros cuadrados”.

En resumen, la propuesta que realiza este texto reciente, editado en 2016, es demasiado formal y apenas trabaja aspectos cualitativos de las representaciones gráficas de funciones y las interacciones entre las representaciones de las funciones.

En el libro 4, de SM, se ofrece una breve descripción y ejemplos de las relaciones entre magnitudes y su representación gráfica, El texto ejemplifica el paso de la representación tabular a la representación gráfica y simbólica de una función lineal que relaciona los gramos de zumo de naranja con el contenido de vitamina C en miligramos.

Cantidad de vitamina C en el zumo de naranja (mg)	
Vitamina C (mg)	Zumo de naranja (g)
0	0
10	5
20	10
30	15
40	20
50	25
60	30
70	35
80	40
90	45
100	50

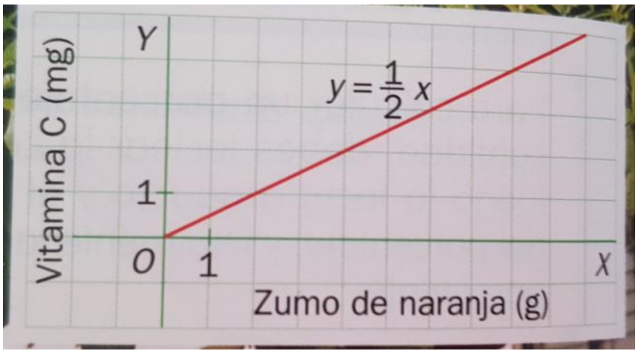
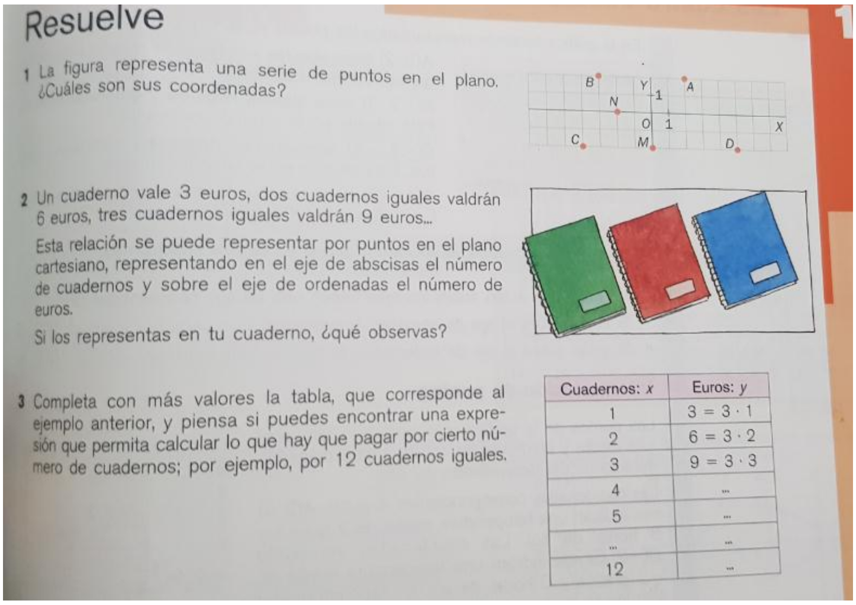


Imagen 15. Tabla de valores y gráfica relacionada, introductorias de tema en el libro de SM

A continuación introduce un apartado de *Resuelve* (Imagen 16), en el cual se pide que determinen las coordenadas de una serie de puntos representados en una gráfica.
Los ejes de coordenadas es un contenido de 1º ESO. El texto plantea un problema para trabajar las traslaciones entre una representación verbal y las representaciones tabular, gráfica y simbólica de una función lineal muy elemental, dando además bastante apoyo a los alumnos lectores del texto.



Resuelve

1 La figura representa una serie de puntos en el plano. ¿Cuáles son sus coordenadas?

2 Un cuaderno vale 3 euros, dos cuadernos iguales valdrán 6 euros, tres cuadernos iguales valdrán 9 euros...

Esta relación se puede representar por puntos en el plano cartesiano, representando en el eje de abscisas el número de cuadernos y sobre el eje de ordenadas el número de euros.

Si los representas en tu cuaderno, ¿qué observas?

3 Completa con más valores la tabla, que corresponde al ejemplo anterior, y piensa si puedes encontrar una expresión que permita calcular lo que hay que pagar por cierto número de cuadernos; por ejemplo, por 12 cuadernos iguales.

Cuadernos: x	Euros: y
1	$3 = 3 \cdot 1$
2	$6 = 3 \cdot 2$
3	$9 = 3 \cdot 3$
4	...
5	...
...	...
12	...

Imagen 16. Apartado *Resuelve.*

Por último el apartado de *Recuerda* en el que se dedica un párrafo para dar un repaso a las coordenadas cartesianas de un punto, las magnitudes que son directamente proporcionales y la regla del producto para resolver ecuaciones.

Dentro de las actividades finales, hay un ejercicio (Imagen 17) que trata de inculcar el razonamiento cualitativo de una forma mucho más convencional que de los problemas propuestos en el texto del Shell Centre (Shell Centre of Mathematical Education, 1985).

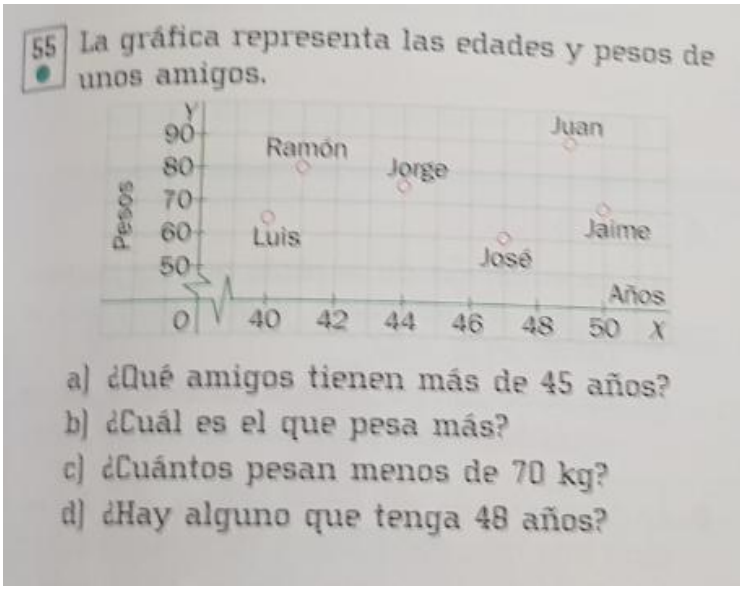


Imagen 17. Gráfica que representa las edades y pesos de 6 amigos.

Este último texto analizado, acerca el objeto al alumnado de una manera excesivamente formal, incluso brinda, al final de la unidad, un resumen en el cual se ofrecen las definiciones y nuevamente ejemplos. Apenas hay preocupación por los aspectos cualitativos de las funciones, hay ejercicios resueltos de todo tipo, de forma que viendo aquellos que ya están resueltos se puede llegar a realizar todos los ejercicios propuestos en la unidad.

En los textos analizados detectamos un excesivo afán por ofrecer una definición formal de la función. Sin embargo esta definición "formal" oculta la verdadera naturaleza del concepto (Sierpinska, 1985, citado por Sierra, González y López, 1998), en el que "lo fundamental es la idea de función como una relación entre magnitudes variables. Si esto no se ve así, representaciones como grafos y ecuaciones pierden su significado, llegando a ser conceptos aislados".

Deloufeu (2001, p. 373) alerta de los numerosos obstáculos que provoca este tipo de enseñanza excesivamente formal, ausente de un trabajo más cualitativo y global de la función y que prioriza la representación "punto a punto, entre los que destaca la interpretación de la dependencia determinada por una gráfica cartesiana, a partir de un conjunto de puntos relevantes de la misma". Para superar estas dificultades este investigador propone, realizar en las aulas, "un trabajo cualitativo y, a la vez, global basado tanto en la interpretación como en la construcción (esbozos) de gráficas de situaciones contextualizadas y no cuantificadas", siguiendo las sugerencias formuladas en las propuestas del Shell Centre (1985)

En esta misma línea Burgos y Flores (2017, p. 72) realizan una reflexión a partir de la creencia de los profesores de matemáticas de bachillerato que formulan del siguiente modo: "los estudiantes mecanizan los procedimientos y no comprenden los conceptos, de forma que no pueden representar o reconocer (interpretar) las características de la función en la gráfica" y, a la vista de la revisión bibliográfica realizada, se plantean la siguiente cuestión profesional: "¿cómo puedo trabajar en clase las funciones para que la visualización permita la interpretación inicial de los conceptos y su definición formal se alcance como parte de un aprendizaje significativo de los mismos a través de los distintos sistemas de representación?". Según estos autores en las prácticas de enseñanza de la función las representaciones gráficas y la interacción entre las representaciones de la función deben jugar un papel relevante (Burgos y Flores, 2107, p. 71).

B2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías habituales

De acuerdo con Azcárate y Deulofeu, 1998, y referente a lo que aporta Janvier (1987) las funciones expresan fenómenos de cambio, representan un modelo físico o una simulación en cuya descripción se manejan tablas de valores, gráficas, fórmulas o ecuaciones, además de la descripción verbal de la propia función. Por todo ello es de suma importancia y utilidad práctica que los alumnos comprendan las funciones mediante una enseñanza, no solo procedimental, sino conceptual, resolviendo problemas que modelicen situaciones de cambio entre dos magnitudes, que obliguen a los alumnos a realizar una interpretación cualitativa de las gráficas de las funciones y realizar, de modo sistemático, traslaciones entre las diferentes representaciones de una misma función.

De acuerdo con aportaciones de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas y teniendo en cuenta el esquema de Janvier (1987) sobre las traslaciones entre las diferentes representaciones que mostramos en la Imagen 1 de esta memoria planteamos organizar los campos de problemas del siguiente modo:

- Transformación de la expresión gráfica a la expresión verbal, tabular y algebraica.
- Transformación de la expresión tabular a la expresión verbal, gráfica y algebraica.
- Transformación de la expresión verbal a la expresión gráfica, tabular y algebraica.
- Transformación de la expresión algebraica a la expresión verbal, tabular y gráfica.

Las técnicas que resuelven estas transformaciones son aquellas asociadas a la representación gráfica sobre ejes cartesianos, a la descripción global de una función, a la función polinómica de primer grado. Las técnicas asociadas a las traslaciones entre representaciones son coherentes con las traslaciones propuestas por Janvier (1987) y son:

- Representar y leer puntos sobre los ejes de coordenadas.
- Lectura y construcción de una tabla de valores.
- Interpretación de gráficas y fórmulas.
- Boceto de una gráfica a partir de la representación verbal.
- Trazado de una gráfica a partir de la representación tabular.
- Representación gráfica a partir de la representación simbólica de una función.
- Modelización de una fórmula a partir de un enunciado.

En nuestra propuesta además de las técnicas asociadas a las traslaciones entre representaciones vamos a considerar las asociadas a la descripción global de una función y las asociadas a la función polinómica de grado uno.

Las tecnologías que vamos a considerar en nuestra propuesta van a hacer referencia a las justificaciones de la descripción global de una función (relación funcional, dominio y recorrido, crecimiento y decrecimiento. continuidad y discontinuidad. máximos y mínimos relativos y cortes con los ejes), y a las justificaciones de las representaciones de la función polinómica de grado uno (cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta).

Después de analizar los libros de texto podemos afirmar que, en la mayoría de las propuestas, la enseñanza de la función es demasiado formal, caracterizada por la ausencia de un trabajo sistemático de traslaciones entre las representaciones de una misma función, y de un trabajo más exhaustivo basado en la interpretación cualitativa de las gráficas de las funciones y en la comprensión de la relación funcional entre magnitudes en situaciones contextualizadas. En la mayoría de las propuestas estudiadas la enseñanza habitual de las funciones no se organiza alrededor de campos de problemas, es decir, de situaciones problemáticas contextualizadas. Más bien el trabajo con los alumnos se focaliza en la enseñanza de técnicas y, en particular, a las técnicas asociadas a la descripción global de una función y a las asociadas a la función polinómica de grado uno.

En efecto, la enseñanza habitual no profundiza en el paso entre diferentes sistemas o lenguajes de representación: verbal (textos), numérico (tablas), gráfico (gráficas cartesianas) y algebraico (fórmulas) algo que es fundamental comprender el fenómeno o situación que modeliza una función tal y como propuso Janvier (1987), más bien tienden a focalizar el paso de la representación algebraica a la representación gráfica de la función, obviando las otras transformaciones que se han definido como campos de problemas.

Otras limitaciones que detecta Deulofeu (2001) son el excesivo tratamiento cuantitativo en la enseñanza de las funciones sustentada en tareas de paso de representaciones algebraicas o tabulares a representaciones gráficas y los obstáculos derivados de la representación punto a punto, entre los que destaca la interpretación de la dependencia determinada por una gráfica cartesiana, a partir de un conjunto de puntos relevantes de la misma, Para superar estas dificultades propone realizar un trabajo de tipo cualitativo siguiendo las propuestas del Shell Centre (1985) donde las funciones aparecen como relaciones globales basada tanto en la interpretación como en la construcción (esbozos) de gráficas de situaciones contextualizadas y no cuantificadas.

B3. Efectos producidos sobre el aprendizaje del alumnado

Dado que la enseñanza habitual tiende a priorizar la enseñanza de técnicas y de tecnologías en detrimento de un trabajo de modelización sustentado en la resolución de problemas, los efectos que produce sobre el aprendizaje de los alumnos son de una mera mecanización y memorización de conceptos, dando como resultado el no saber representar o reconocer (interpretar) las características de una función en la gráfica. Los efectos que produce es la falta de comprensión de los conceptos relacionados con las funciones.

C. Conocimientos previos del alumno

C1. Conocimientos previos necesarios por el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático

Según la el currículo de 1º de la ESO, el bloque 4 sobre funciones (ECD/489/2016, 2016) los contenidos que deben tratarse son:

- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula).
- Funciones de proporcionalidad directa. Representación.

Previo a este objeto se ha introducido, en el bloque 2 de números y álgebra, del curso 1º de ESO:

- Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
- Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa.

En el presente curso, en el bloque 2 de números y álgebra, se manejan los mismos contenidos que en 1º, sólo se añaden los repartos directa e inversamente proporcionales.

C2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Podemos suponer que en la enseñanza previa, de 1º de la ESO, se han adquirido las herramientas necesarias. Teniendo en cuenta los criterios de evaluación que hemos escrito en la página 2 de esta memoria.

Supondremos además que los alumnos saben utilizar el programa GeoGebra, en el cual están ya familiarizados con la representación de puntos así como con los ejes y la ecuación; en el caso de que algún alumno no sepa utilizar GeoGebra se dedicará una sesión para presentar y familiarizarse con esta herramienta.

C3. Actividades mediante las cuales se pretende asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos

Se ha propuesto como actividad de partida un juego “batalla naval” o “hunde el barco”. Mediante la cual pretendemos repasar la estructura (x, y) de coordenadas del punto, es decir el par de números reales que le corresponde a cada único punto del tablero, asimismo la diferenciación entre los ejes (abscisas y ordenadas), este juego en particular fue desarrollado durante el practicum en la primera sesión de la unidad, buscaba mediante este juego un acercamiento distendido y recordar lo que ya se habían aprendido en el curso anterior, en particular las coordenadas, de éste se derivó también a los cuadrantes y un esbozo sobre el nombramiento de los ejes.

Por parejas, ambos deberán distribuir su flota en su correspondiente tablero y marcar 1 barco de 1x2, 2 de 2x3 y 1 de 1x4. Intentarán descubrir la flota del adversario dando las coordenadas, empleando la notación que se marca. Ganará el que lo consiga primero.
A los alumnos se les proporcionará un tablero como el siguiente:

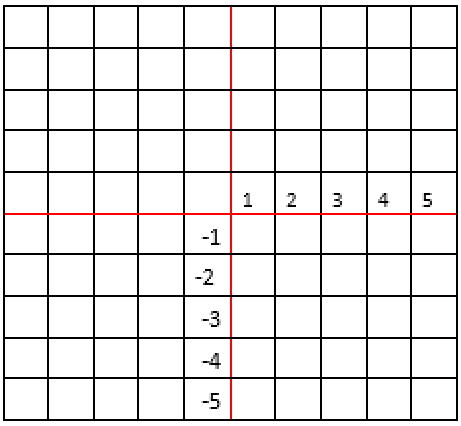


Imagen 18. Tablero de juego "Batalla Naval"

La segunda actividad la tomamos directamente de los propuestos en el libro de Shell Centre.

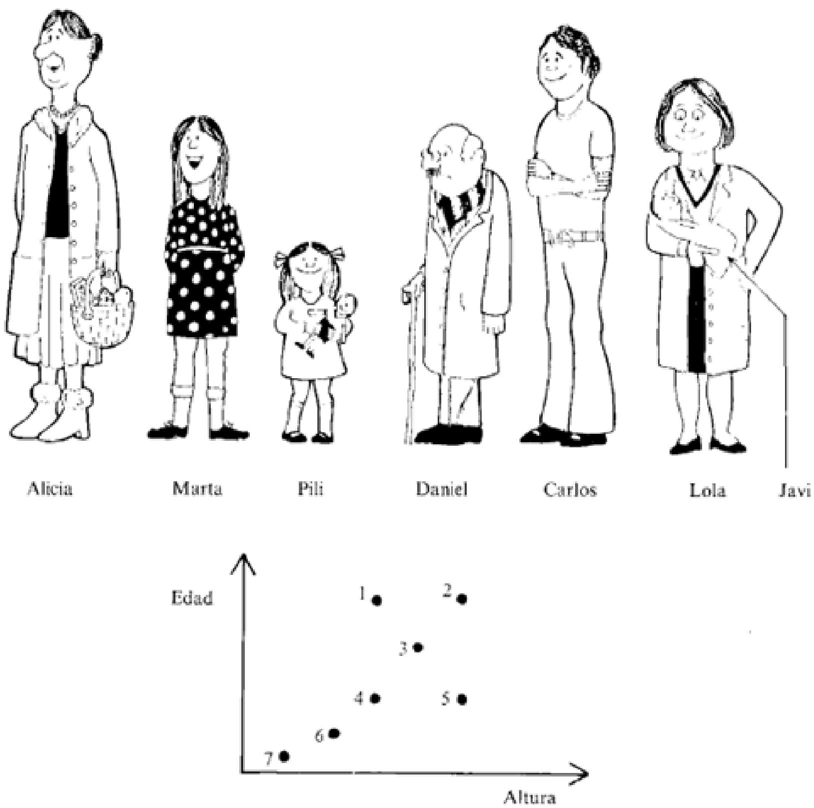


Imagen 19. Actividad de identificación y relación de puntos con las personas.

Se ofrece a cada alumno la anterior imagen y deben contestar a la pregunta "¿Quién está representado por cada punto del diagrama inferior?" (Shell Centre of Mathematical Education, 1985). El objetivo de esta actividad es el reconocimiento de las variables, la graduación y la identificación de los puntos de la gráfica.

Sin haber dado inicio a relacionar los puntos con las personas, se harán las siguientes preguntas, que en definitiva son el propósito de esta actividad, para contextualizar y fomentar el debate con los alumnos en la puesta en común de la clase (Azcárate, 2001)

- ¿Qué indica cada uno de los ejes?
- ¿Cómo están graduados los ejes?
- ¿En qué unidades de miden las variables?
- ¿Qué significa el origen de coordenadas de esta gráfica?

Se promueve la discusión en grupos o en la clase. El resultado final de la discusión no dejará lugar a dudas:

- Javi es el más joven y el más pequeño, por lo que le corresponde el 7.
- Alicia y Carlos son los más altos y tienen una estatura similar (2 y 5), sin embargo Carlos es más joven, así pues Carlos es el 5 y Alicia el 2.
- Marta y Daniel tienen una estatura similar (1 y 4), son más altos que Pili pero más bajos que Lola.
- Se deduce que Pili es el 6 y Lola el 3.
- Marta entonces es el 4 y Daniel el 1.
- Daniel y Alicia tienen edades similares, igual ocurre con Marta y Carlos.

Por último se ofrece el siguiente enunciado, actividad extraída de Azcárate (2001, 242/64.38.35):

Durante 3 horas de un día de lluvia se han recogido los siguientes datos en el pluviómetro del instituto:

Tiempo (min)	15	30	45	60	90	120	150	180
Agua (l)	10	25	40	50	70	90	120	130

a. Construye la gráfica que describe el agua recogida durante estas 3 horas.
b. ¿Puedes decir qué cantidad de agua ha caído aproximadamente después de 2 horas y 15 minutos?
c. ¿Qué tiempo ha pasado cuando se llevan recogidos 100 litros?

En este caso la dificultad inicial se presenta en la división adecuada de los ejes, deberían hacerlo sobre papel cuadriculado y tener en cuenta que inicialmente los datos del tiempo son cada 15 min, y después cada 30. Las cuestiones b y c son adecuadas para realizar lecturas aproximadas, actividad de gran interés en el tratamiento de gráficas.

D. Razones de ser del objeto matemático

D1. Razones de ser a tener en cuenta en la introducción del objeto matemático

Las razones principales por la que se introduce este objeto matemático es el desarrollo de la capacidad modelización de fenómenos de cambio que acontecen o pueden acontecer en la vida real. Para comprender un fenómeno modelizado por una función es necesario conocer las diferentes representaciones de la función, dado que cada uno de ellas aporta información diferente del fenómeno a estudiar. De acuerdo con las aportaciones fundamentales de Janvier (1978), se pueden considerar las siguientes representaciones que permiten representar un fenómeno de cambio:

- ✓ Modelo físico o simulación
- ✓ Descripción verbal
- ✓ Tabla de valores
- ✓ Gráfica
- ✓ Fórmula o ecuación

Como cita Azcárate (2000, p. 242/67), "dejando al margen el modelo físico o su simulación, se puede considerar, en primer lugar, la explicación verbal que utiliza el lenguaje común para dar una visión descriptiva, generalmente cualitativa, de la relación funcional y a la cual nos referimos al interpretar los otros lenguajes de un mayor nivel simbólico.
Siguiendo un orden creciente de abstracción, la tabla de valores da una visión numérica que se ajusta a la interpretación de una función como correspondencia entre pares de valores, aunque resulta insuficiente y parcial en la mayoría de los casos en los que no permite conocer las características globales de la función.
Los dos lenguajes de mayor abstracción y los más difíciles de interpretar, la gráfica y la fórmula, ofrecen una visión general y completa de la función, tanto cualitativa como cuantitativa. Estos lenguajes gráfico y algebraico proporcionan mayor y mejor información que los lenguajes anteriores y permiten la caracterización de distintos modelos".
La representación gráfica es la que permite visualizar las características globales de la función, esto es: crecimiento, continuidad, períodos constantes, máximos y mínimos, etc. Estos contenidos también se puedes trabajar desde la representación algebraica, sin embargo su interpretación no es tan intuitiva. Por otro lado, la ecuación ofrece la exactitud de los valores de las dos variables, siempre que se conozca el algoritmo de resolución de la ecuación correspondiente, en cambio, con la gráfica los valores sólo con aproximados.

Concluyendo, el aprendizaje de las funciones pasa por el conocimiento de cada uno de estos lenguajes de representación cuyas traslaciones hemos descrito en la página 3 de esta memoria.

D2. Razones de ser históricas que dieron origen al objeto

Siguiendo el estudio de Youschkevitch (1976, citado por Azcárate y Deulofeu, 1998), se van a distinguir tres grandes períodos:

I. El mundo antiguo

Las primeras relaciones funcionales aparecen en el mundo antiguo ligadas a problemas principalmente astronómicos, en forma tabulada a partir de interpolaciones generalmente lineales, y alcanzan su mayor precisión en el *Almagesto* de Ptolomeo que llega a introducir con su tabla de cuerdas la función seno. No obstante, ni estas funciones tabuladas ni los trabajos sobre curvas ligados al estudio de las cónicas -realizados por los griegos, principalmente por Apolonio- llevaron al parecer a ningún tipo de consideración general sobre la idea de *variable* o de *función*.

Se puede concluir que el estudio de fenómenos de cambio es aún muy reducido y que las aproximaciones cuantitativas y cualitativas de dichos fenómenos se hayan todavía totalmente disociadas y, por tanto, no es posible hablar de la formulación explícita de nociones como *variable*, *dependencia* o *función* (p. 242/64.56).

II. La Edad Media.

Período en el que, a pesar de aparecer explícitas ciertas nociones generales -ya sea en forma geométrica o mecánica-, cada caso concreto de dependencia entre dos cantidades variables se expresa mediante una descripción verbal o, a lo sumo, mediante un gráfico, quedando todavía muy relegada la determinación de leyes cuantitativas de los fenómenos de cambio estudiados. Dentro de este periodo destacaremos, por un lado, el cambio de mentalidad que empezó a producirse en el estudio de los fenómenos naturales, como por ejemplo el movimiento, en Francia e Inglaterra y, por otro, las aportaciones de Oresme, por tratarse de los primeros intentos de representación gráfica de la dependencia entre variables (p. 242/64.53).

Debemos iniciar con una referencia del trabajo desarrollado por los árabes que, como es bien conocido, tomaron el relevo de los griegos por lo que al estudio de la ciencia se refiere y permitieron que el legado de éstos llegara a Occidente. Sin embargo, en relación con la idea de función, a pesar del notable incremento en el número de funciones consideradas -que abarca, entre otras, la mayoría de funciones trigonométricas, así como la mejora de los métodos de estudio de las mismas, ampliando y perfeccionando los sistemas de interpolación esenciales para la tabulación de funciones- no podemos hablar de un cambio sustancial en el tratamiento de las mismas, ni tenemos en indicios que nos permiten pensar que los árabes avanzar así el concepto general, por lo que, a pesar de la existencia de algunos resultados concretos importantes, no entraremos en detalles (p. 242/64.56).

III. El periodo moderno.

Se inicia a finales del siglo XVI y podemos considerarlo como el de la aparición del concepto de *función* con aproximaciones cada vez más amplias y generales. En él, el estudio del movimiento se convierte en un problema esencial, al mismo tiempo que el descubrimiento de la geometría analítica permite desarrollo de las expresiones algebraicas de funciones. Posteriormente, en la segunda mitad del siglo XVII, la expresión de funciones por medio de series de potencias permitió ampliar el campo de las funciones tratadas analíticamente. Fue precisamente el método analítico para introducir las funciones lo que revolucionó las matemáticas y, por su gran eficacia, aseguró un lugar privilegiado al concepto de función dentro de las matemáticas. Más tarde, ya en el siglo XVIII, esta interpretación de las funciones como expresiones analíticas resultó demasiado restrictiva, dando lugar a nuevas definiciones del concepto general de *función* que serán universalmente aceptadas en el análisis matemático (p. 242/64.53).

Es el siglo XVII el período que se puede considerar como el más fecundo para la formación del concepto de *función*, puesto que en él vivieron, entre otros, Galileo, Descartes, Fermat, Newton, Leibnitz y Gregory, cuya contribución desde distintos puntos de vista dará lugar nada menos que el nacimiento, primero, de la geometría analítica y, después, del cálculo infinitesimal, con el consiguiente progreso para el estudio de las funciones que permitirá la aparición de las primeras definiciones, así como el término de *función* (p. 242/64.58).

D3. Problemas que se constituyen en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar

Como problema proponemos el ejercicio 21 de la página 304 de Matemáticas 2º ESO, EDEBÉ, que plantea una situación que modeliza mediante una función polinómica de primer grado, que pueden gestionar con relativa facilidad los alumnos a los que se dirige esta propuesta.

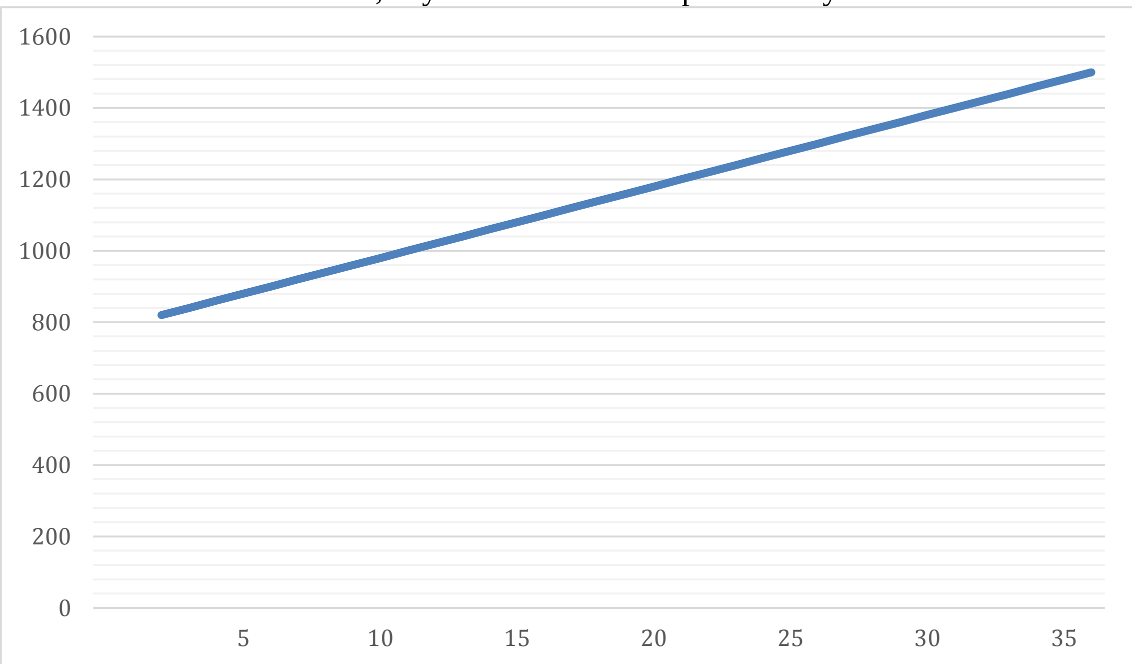
Problema 1. Un grupo excursionista recibe una subvención de 800€ al año fijos, más 20€ por cada excursionista inscrito. ¿Cuánto ganarán si tienen 35 excursionistas inscritos en el año?
Con la intención de guiar el ejercicio, planteo los siguientes puntos:

- Realizar una tabla
- Identificar el tipo de función que es
- Expresión algebraica de la función que relaciona la cantidad de dinero percibida con respecto al número de excursionistas inscritos
- Expresión gráfica de la función
- ¿Tendría sentido unir los puntos?

Solución:

x (número de excursionistas)	0	1	15	35
y (€)	800	820	1100	1500

Se trata de una función lineal, cuya fórmula se corresponde con $y = 20x + 800$



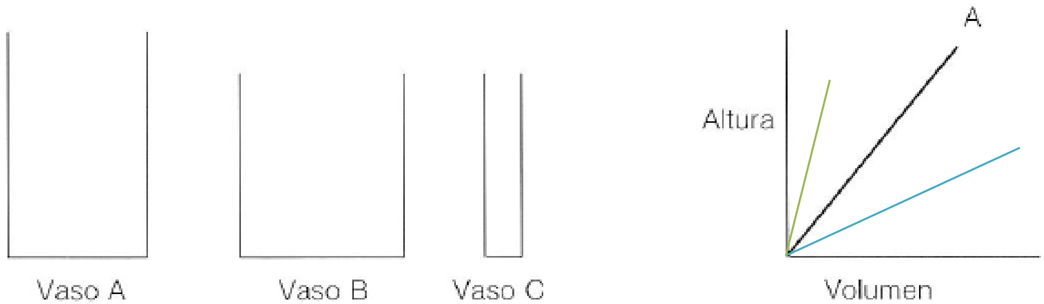
Dado que en 1º de ESO los alumnos han recibido enseñanza de la función de proporcionalidad directa, se espera que no tengan grandes dificultades para modelizar esta función lineal.

Durante el practicum realizamos un ejercicio similar, en el cual defendían la unión o no de los puntos, a grandes rasgos se espera que digan que se podrían unir para observar mejor el comportamiento, acercándonos más bien a una línea de tendencia. No obstante, la respuesta correcta es que indiquen que se trata de una función discontinua porque en el dominio son números naturales, ya que no podemos calcular la cantidad de dinero percibida si tuviésemos 2,5 excursionistas apuntados, pues tal cantidad de personas no existe.

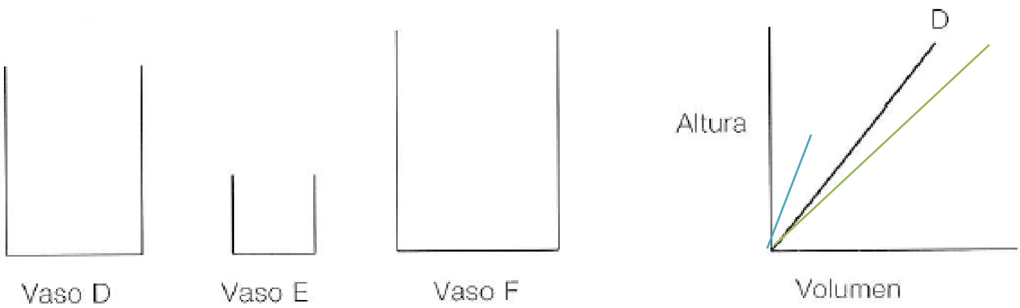
Propongo también un ejercicio, para realizar por parejas, extraído Azcárate y Deulofeu (2001, p. 242/64.24-25), en el que deberán esbozar la gráfica que muestre cómo varía la altura del líquido a medida que se va llenando cada frasco.

<u>Problema 2</u>. Según vamos llenando una botella de agua, nos fijaremos en la variación de la altura del nivel de agua con respecto al volumen de líquido que hay en el recipiente.

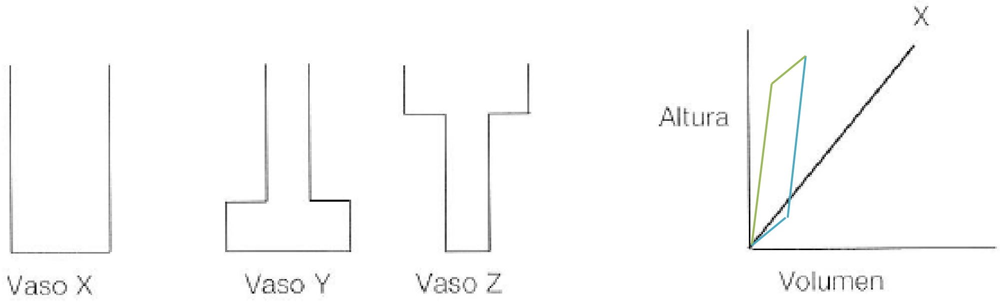
Para cada botella, podemos obtener la gráfica que muestra cómo varía la altura de líquido a medida que se va llenando el frasco. Te vamos a dar tres series de vasos distintos; en cada caso tienes la gráfica correspondiente al primer recipiente, que siempre es el mismo.



Añade la gráfica correspondiente a los vasos B y C. *Solución:* En azul el vaso B, y en verde el vaso C.



Ahora añade la gráfica correspondiente a los vasos E y F. *Solución:* En azul el vaso E, y en verde el vaso F.



Finalmente, añade la gráfica correspondiente a los vasos Y, Z. *Solución:* En azul el vaso Y, y en verde el vaso Z.

Tras haberlo finalizado, pondremos en común las respuestas y comentaremos en general el comportamiento de la función lineal en un contexto bastante elemental que sirve para que los alumnos realicen traslaciones entre representaciones verbales y gráficas, y trabajen el concepto de pendiente desde una perspectiva gráfica.

D4.Metodología a seguir en su implementación en el aula

Para la implementación de los problemas anteriores propongo, para el primero, que se realice de manera individual, y para el segundo, como en él se menciona, por parejas.

En ambos casos el/la profesor/a actúa como apoyo y guía, cuando lo demanden o él/ella mismo/a lo detecte, dando indicaciones o haciendo comentarios que los conduzcan hacía la solución.

Una vez hayan terminado, se propiciará una puesta en común, de esta forma resolveremos grupalmente las dudas e institucionalizaremos los conceptos que se tratan.

En el caso del último problema, en el que deben plantear nuevas situaciones y elegir la gráfica, dependiendo del tiempo que hayamos invertido, y si hemos logrado abarcar la totalidad de ambos problemas, lo harán o no como actividad en casa.

E. Campo de problemas

E1 Distintos problemas a presentar en el aula

Teniendo en cuenta que nuestros campos de problemas van a ser estos:

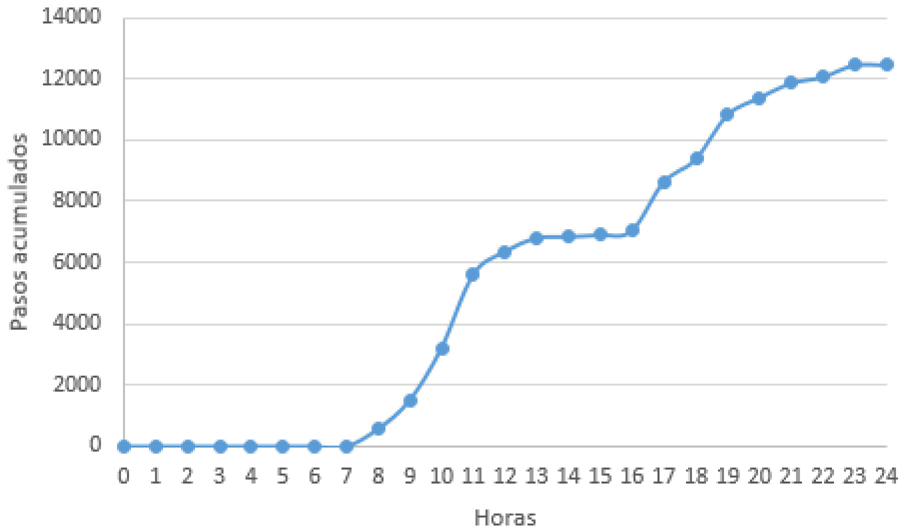
- Transformación de la expresión gráfica a la expresión verbal, tabular y algebraica.
- Transformación de la expresión tabular a la expresión verbal, gráfica y algebraica.
- Transformación de la expresión verbal a la expresión gráfica, tabular y algebraica.
- Transformación de la expresión algebraica a la expresión verbal, tabular y gráfica.

Vamos a ofrecer los distintos problemas con los cuales trabajaremos todos los campos de problemas.

E.1.1. Transformación de la expresión gráfica a la expresión:

- verbal (interpretación)
- tabular (lectura)
- algebraica (ajuste)

Problema 3. Daniel ha extraído, de su pulsera de actividad, la gráfica que representa el número de pasos que ha ido acumulando a lo largo del día. La mostramos a continuación:



Un ejercicio muy similar fue planteado durante la realización del practicum en el periodo lectivo 2018 – 2019, no ha sido extraído de ningún libro de texto, ha sido diseño propio.

En los siguientes apartados pasamos de la representación gráfica a la verbal.

a. Narra lo que crees que Daniel ha podido hacer a lo largo del día.

Solución: Daniel ha dormido hasta las 7 de la mañana, se ha aseado, ha desayunado y se ha organizado para salir, ha ido caminando hasta su trabajo, se podría suponer que dados los pasos que ha ido acumulando, trabaja como paseador de perros, ha estado de 9 a 11 con mucha actividad, los ha entregado y a las 12 del mediodía.

Ha regresado a su domicilio, creo que ha hecho una siesta y desde las 16h hasta las 19h ha estado paseando otras mascotas, a un ritmo más suave.

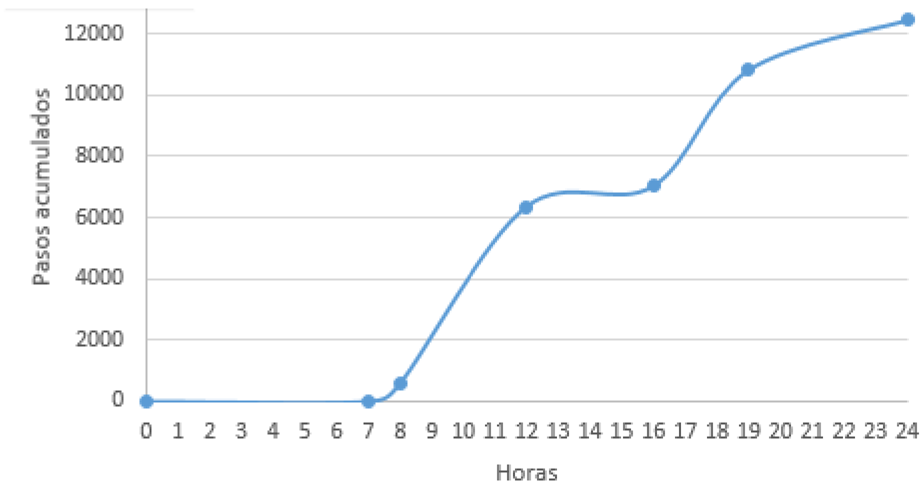
Ha regresado a casa, pero no sin antes pasar a comprar, a las 21h se ha dispuesto a cenar y ha estado realizando algunas cosas que le habían quedado pendiente en casa, parece que antes de la media noche se ha acostado.

b. ¿Crees que esta gráfica podría representar un día tuyo? ¿Cuál?

Solución: Un día de verano cualquiera, pues me voy de vacaciones al pueblo y estoy por la mañana y por la tarde fuera, no sé si haga esos pasos, más o menos, pero la forma de la gráfica podría ser similar.

Ahora, pasamos a trabajar la traslación entre la representación gráfica y tabular.

c. Simplificando la gráfica, que se muestra a continuación, ¿Cuántos pasos llevaba a las 8 de la mañana? ¿A las 12? ¿A las 16? ¿A las 19? ¿A la media noche? Exprésalo en forma de tabla de valores.

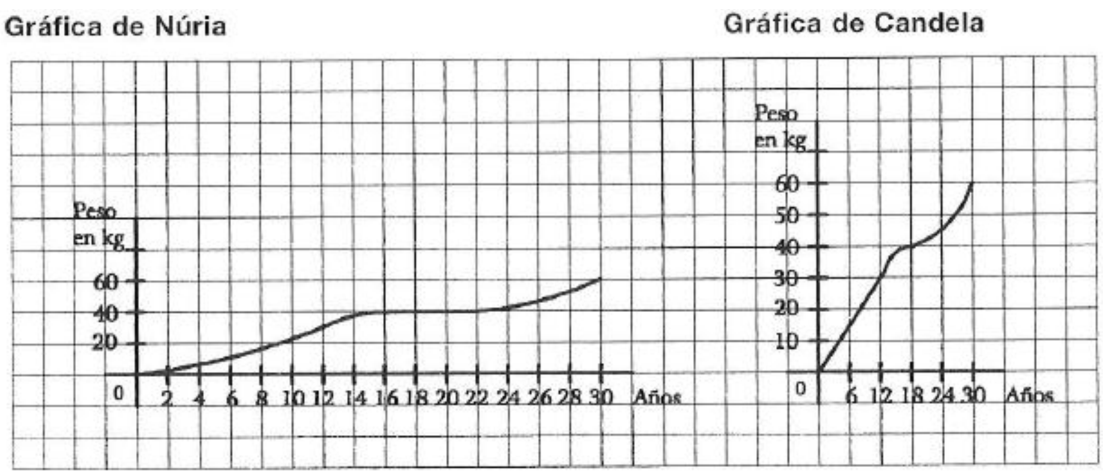


Solución:

x (hora)	7	8	12	16	19	24
y (pasos acumulados)	0	500	6200	6500	11000	12200

Una vez finalizado todos los puntos del ejercicio, nos valdremos de la gráfica para introducir el concepto de dominio y recorrido, así como el de evaluar el comportamiento de esta gráfica.

<u>Problema 4.</u> Extraído de Azcárate y Deulofeu (1998, 242/64.38.27), para realizarlo en grupos de tres personas y trabajar la traslación grafica a verbal y tabular. Dos hermanas gemelas, Nuria y Candela, han representado en una gráfica su peso a lo largo de sus primeros 20 años.



a) Observando las gráficas, ¿cuál de las dos hermanas parece que ha aumentado de peso más rápidamente? Explicadlo.
Solución:
Parece que Candela ha aumentado más rápido de peso, dado que la pendiente de Núria es mucho más suave que la de su gemela.

b) Cuándo tenían 12 años, ¿cuánto pesaba cada una? ¿Y a los 18? ¿Y a los 24? ¿Y a los 30?
Solución:

	12 años	18 años	24 años	30 años
Núria	30	40	40	60
Candela	30	40	45	60

c) Tras los resultados del apartado anterior, mantenéis la explicación del apartado a o creéis que haya que modificarla.

Solución:

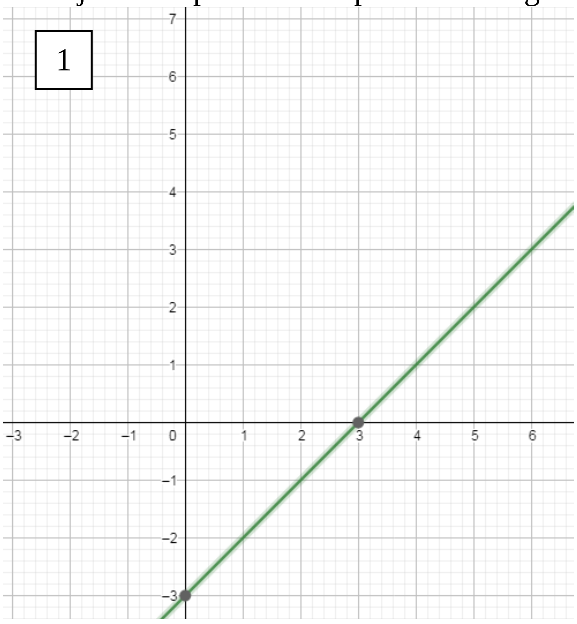
Se debería modificar, dado que ambas han seguido una evolución similar de aumento de peso.

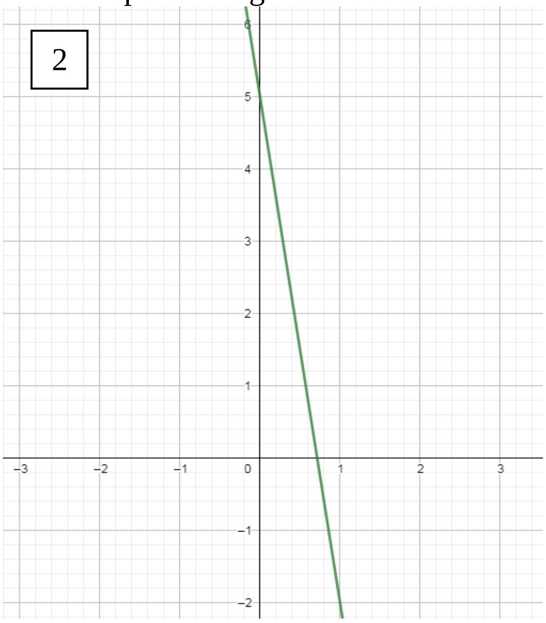
En este problema haremos frente al cambio de escala empleado en los ejes, dado que la impresión visual, o el primer contacto con cada gráfica ya predisponen al observador a un resultado u otro.

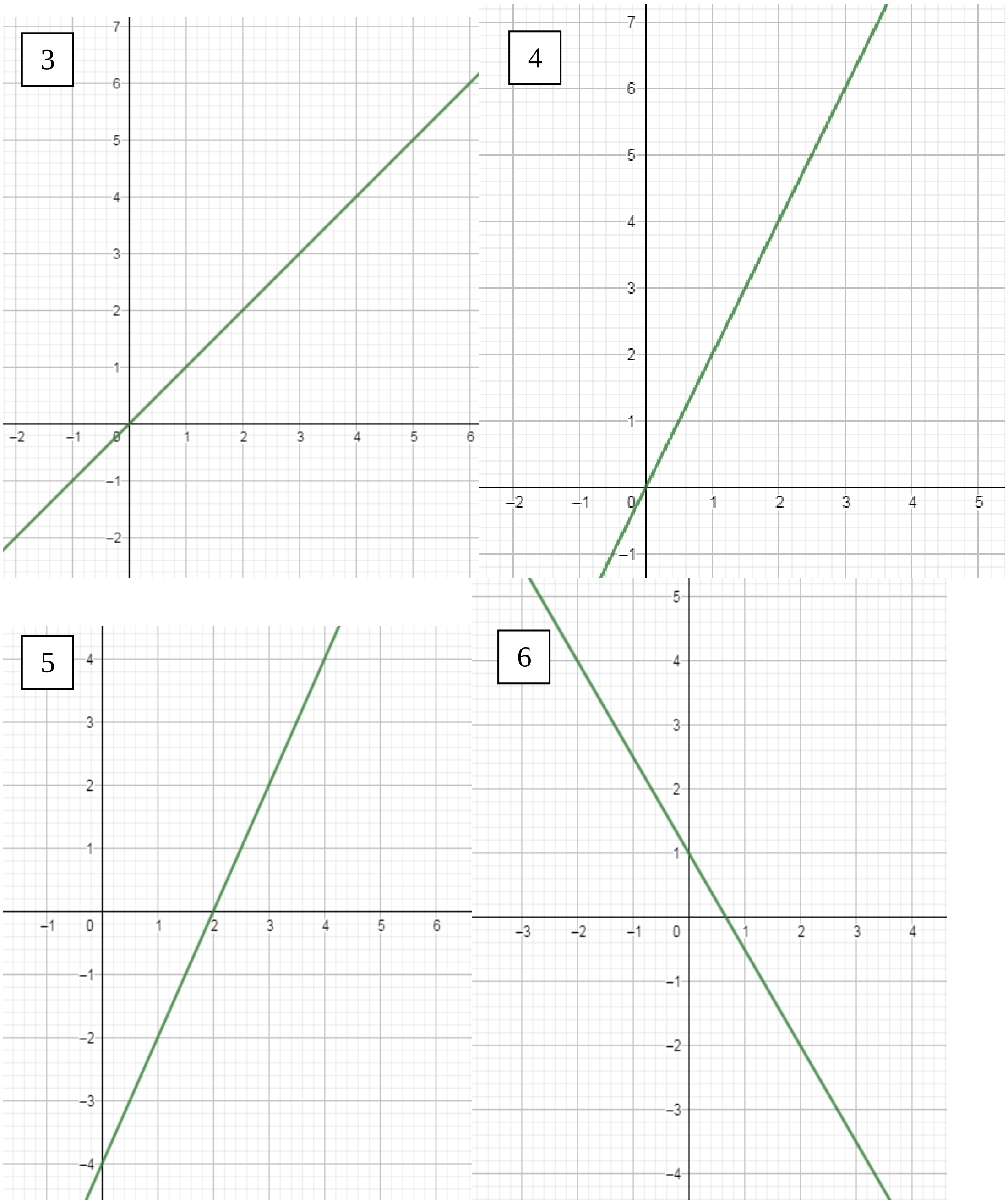
Problema 5. A continuación se presentan seis gráficas, relaciona cada una de ellas con su fórmula.

a) $y = 2x$
b) $y = x - 3$
c) $y = -1{,}5x + 1$
d) $y = x$
e) $y = 2x - 4$
f) $y = -7x + 5$

Trabajamos el paso de la representación gráfica a la expresión algebraica.



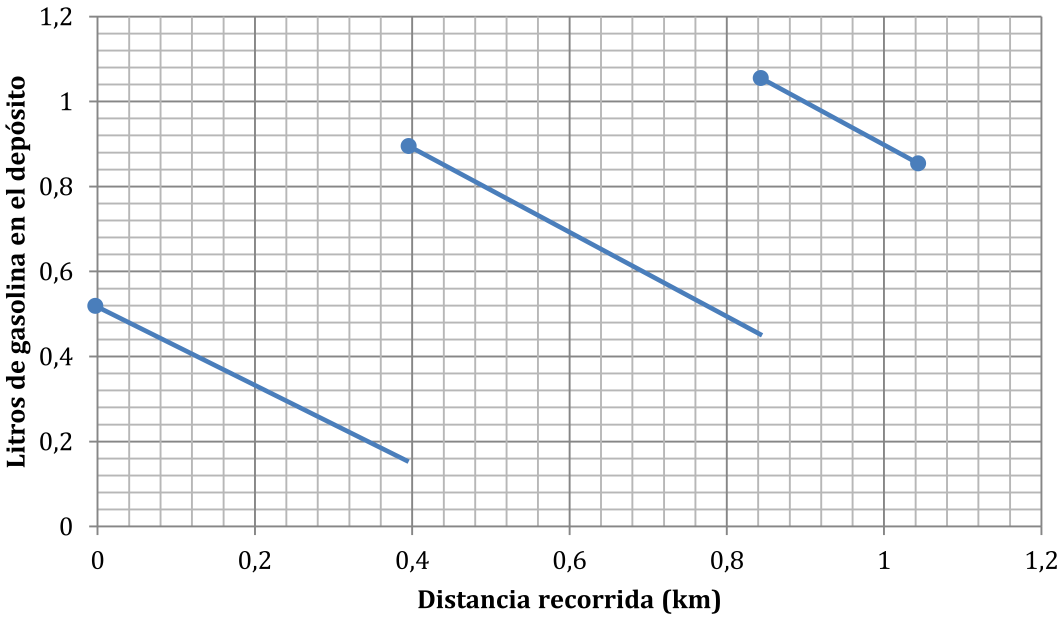




Solución:
1.b. 2.f. 3.d. 4.a. 5.e. 6.c.

En este momento inicial de la secuencia de la enseñanza esperaría que los alumnos eligieran puntos notables de las gráficas para identificar la representación simbólica de cada gráfica. No obstante, aunque no se introduzca en este momento la técnica de cálculo de la pendiente, los alumnos pueden observar que las representaciones simbólicas de las gráficas que pasan por el origen de coordinadas carecen de ordenada en el origen, que las funciones que tienen pendiente positiva son crecientes y las que tienen pendiente negativa son decrecientes; e incluso observar que la inclinación de la recta depende del valor de la pendiente.

Problema 6. Extraído de Azcárate y Deulofeu (1998, 242/64.38.13), para trabajar la traslación entre la representación gráfica y la representación algebraica y verbal. La gráfica muestra cómo varía la cantidad de gasolina que hay en el depósito de un coche durante un viaje por carretera.



a) Haz un comentario acerca de lo que te parece la forma de la gráfica ¿A qué lo atribuyes?
Solución:
Parece una escalera, va gastando el combustible y al repostar gana lo perdido e incrementa sus reservas.

b) Determina el dominio y el recorrido de la función.
Solución:
Dom f(x) = (0, 525) ó 0 < x < 525
Recorrido = (5, 35) ó 5 < y < 35

c) ¿Cuánta gasolina tenía el depósito después de recorrer 360km?
Solución:
19 litros

d) Si en el depósito caben 40 litros, ¿cuándo contenía más de medio depósito?
Solución:
Entre los 200 y 350 km de recorrido, y después de los 425km de recorrido.

e) ¿Cuánta gasolina usó en los primeros 200km?
Solución:
12,5 litros

f) ¿En cuántas gasolineras ha parado?
Solución:
En 2.

g) ¿En qué gasolinera ha repostado mayor volumen de gasolina?
Solución:
En la primera gasolinera.

h) ¿Cuánta gasolina ha gastado en todo el viaje?
Solución:
Ha gastado 32,5 litros.

i) Si no hubiera parado a reponer gasolina, ¿dónde se habría quedado sin ella?
Solución:
Tras haber recorrido 280km.

j) Y si solo hubiera parado en la primera gasolinera, ¿dónde se hubiera quedado sin gasolina?
Solución:
No se hubiera quedado sin gasolina, hubiera llegado a su destino.

k) ¿Cuántos litros consume este coche por cada 100km en carretera?
Solución:
Consume 6,25 l/100km.

l) ¿La tasa de consumo de gasolina se mantiene constante durante todo el trayecto? Obtén la ecuación de cada una de las rectas que marca el consumo de gasolina tras haber parado a repostar.
Solución:
Dado que la pendiente es la misma de -6,25/100, quiere decir que son rectas afines, cuyos puntos de corte con los ejes variarán.
Para cada tramo las ecuaciones son, en orden:
$y = 17{,}5 - 0.0625x$
$y = 41{,}56 - 0.0625x$
$y = 62{,}5 - 0.0625x$

E.1.2. Transformación de la expresión tabular a la expresión:

- gráfica (trazado)
- verbal (lectura)
- algebraica (ajuste)

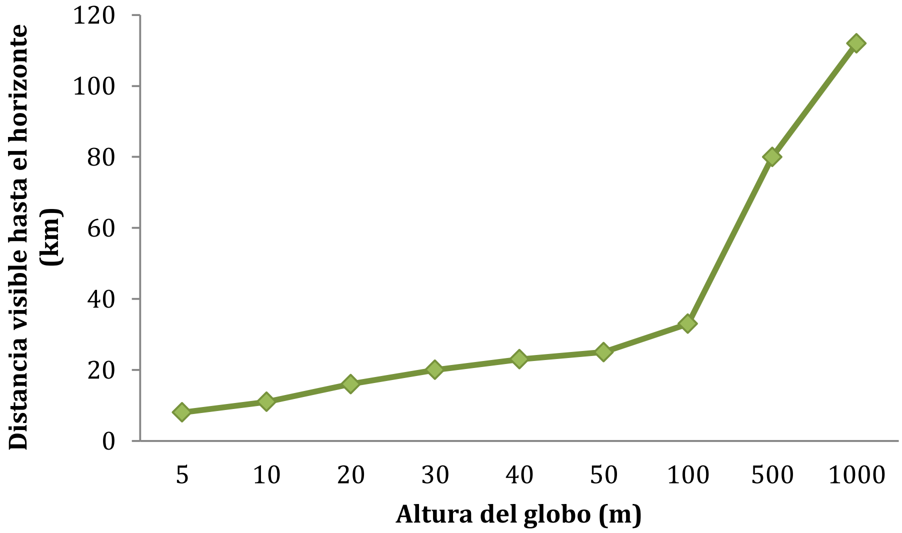
Problema 7. Durante sus vacaciones, Laura y sus padres realizaron un viaje en globo aerostático, y pudieron extraer los datos que a continuación se reflejan en la tabla (Shell Centre of Mathematical Education, 1985), mediante el cual trabajaremos la traslación de la representación tabular a la representación gráfica.

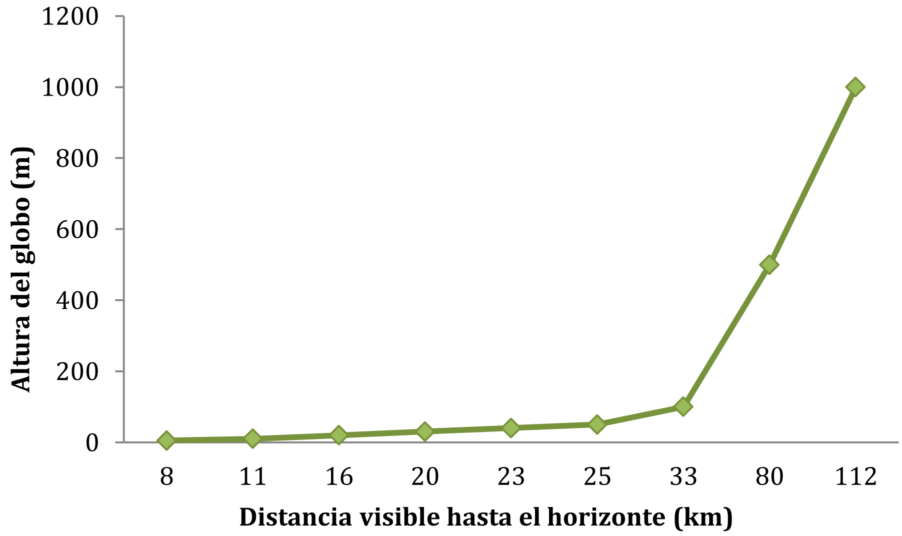
Altura del globo (m)	Distancia visible hasta el horizonte (km)
5	8
10	11
20	16
30	20
40	23
50	25
100	33
500	80
1000	112

Realiza una gráfica aproximada que describa la relación entre la altura del globo y la distancia al horizonte.

Explica, brevemente, el razonamiento que has seguido. ¿Sabrías enunciar cuál es el dominio y recorrido de esta función? Identifica si se trata de una función monótona, si tiene máximos y mínimos (relativos y/o absolutos).

Solución:





Esperaría una gráfica similar a las que se muestran previamente, dado que pueden entender que aumenta el campo de visión gracias a la altura a la que se va elevando el globo, o entender que es gracias a la distancia visible hasta el horizonte que el globo va adquiriendo altura

En cuánto a su explicación, me gustaría que mencionasen el cambio de unidades, es decir, en un eje manejamos metros, y en el opuesto kilómetros. Sería interesante, a su vez, encontrar tanto la altura del globo en el eje de abscisas y en el eje de ordenadas, de esta forma podríamos abrir un pequeño paréntesis y remarcar la importancia de la variable dependiente e independiente.

Al haber introducido el dominio y recorrido recientemente, es de esperar que surjan dudas y errores de estimación.

Problema 8. Clara y José, tras una noche de celebración, y después de estar bebiendo cervezas, han decidido medir en casa, con un alcoholímetro, los niveles de alcohol en sangre, para verificar el descenso. Las medidas se obtuvieron dejando un tiempo prudencial, que se conoce como meseta, tiempo en el que se mantiene estable el nivel de alcohol. Así pues, presentamos la tabla que ellos obtuvieron (Shell Centre of Mathematical Education, 1985). Trabajaremos en este problema, la traslación tabular a la expresión algebraica.

Tiempo (h)	1	2	3	4	5	6	7
Alcohol en sangre (mg/100ml)	90	75	60	45	30	15	0

Con tus propias palabras y basándote en la tabla, di qué está sucediendo.
¿Cómo varía la concentración de alcohol en sangre, a medida que van pasando las horas? ¿Sería posible calcular la concentración al transcurrir 2 horas y 30 minutos? ¿Cuál sería el valor? ¿Y tras 3 horas y 45 minutos?
¿Cuál es la expresión algebraica que representa este comportamiento?
Solución:
Según la tabla, se trata de un comportamiento decreciente y lineal, pues por cada hora transcurrida la concentración de alcohol en sangre disminuye en 15 mg/100ml.
Tras las 2:30h el nivel de alcohol es de 67,5mg/100ml.
Tras 3:45h sería de 56,25mg/100ml.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad\qquad y = mx + b$$

75 - 90 = m (2 - 1)
m= -15
b= y – mx
b= 90 – (-15*1)
b= 105
y = 105 – 15x

E.1.3. Transformación de la expresión verbal a la expresión:
- gráfica (lectura)
- tabular (medida)
- algebraica (cómputo)

Problema 9. Una ballena adulta puede comer hasta mil kilogramos al día, entre kril y crustáceos, se sabe que para abastecerse, mientras duerme, solo una parte de su cerebro "duerme", dado que debe estar alerta y responder a cada una de sus funciones.
Desde las 4 de la madrugada ha estado filtrando agua y obteniendo durante 6h la mitad del alimento necesario, es decir, 500 kg. A partir de las 10 de la mañana se ha encontrado con aguas poco ricas en alimento, así que la tasa de obtención ha sido de 50kg/h. Una vez obtenidos los 1000 kg de alimento se ha dedicado al descanso, al juego y la alimentación de su cría.

a) Elabora una tabla de valores, en la que se muestre el acumulado de alimento obtenido cada hora, a partir de las 4 de la madrugada.
Solución:

Hora	4	5	6	7	8	9	10
Alimento acumulado (kg)	0	83.33	166.67	250	333.33	416.67	500

Hora	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Alimento acumulado (kg)	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000

b) ¿A qué hora habrá obtenido los 1000 kg de alimentos necesarios? ¿A partir de qué hora cambió el ritmo de alimentación?

Solución:

Ha terminado de obtener los 1000 kg de alimentos a las 20h.

A partir de las 10 de la mañana el ritmo de alimentación disminuyó.

c) ¿Podrías deducir la tasa de obtención de alimento en el primer tramo?

Solución:

Puesto que los 500kg de alimento los obtuvo en 6h, la tasa de alimentación es resultado de dividir 500 entre 6, 83,33kg/h.

d) Dado que se presentan dos ritmos o tasas de alimentación, enuncia ambas expresiones algebraicas. ¿Qué representa la pendiente en cada caso?

Solución:

Deberán identificar la tasa de alimentación como la pendiente, y sustituir en la expresión $y = mx + b$ para obtener el término independiente b.

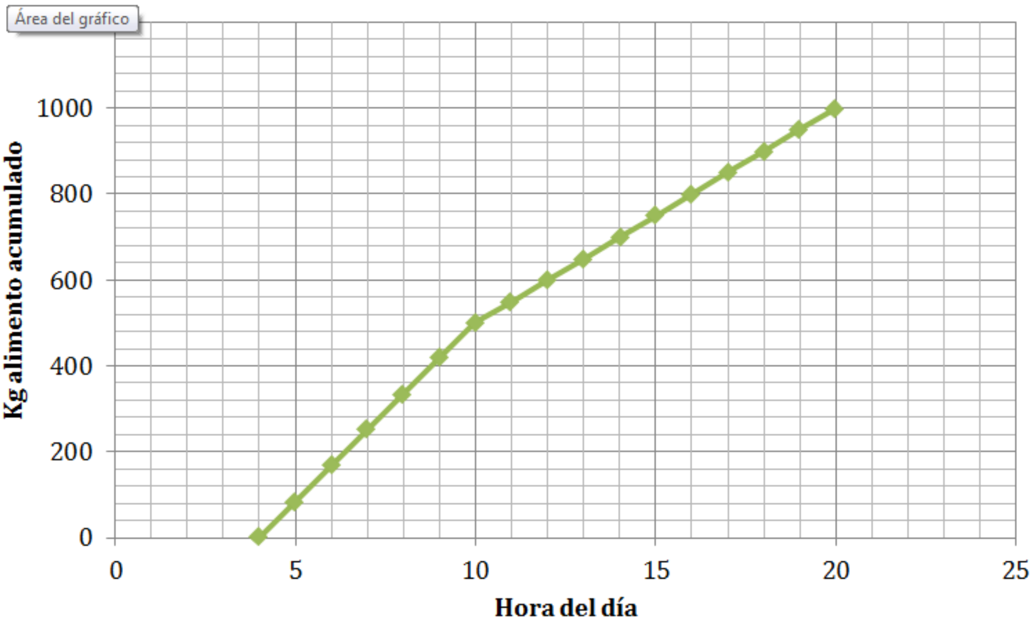
Desde las 4 y hasta las 10 de la mañana, la expresión algebraica es:

$y = 83{,}33x - 333{,}33$

Desde las 10 de la mañana y hasta las 8 de la tarde, la expresión algebraica es:

$y = 50x$

e) A partir de la tabla obtenida, refleja en una gráfica el acumulado de la obtención de alimento de la ballena con respecto de la hora



f) ¿Cuál es el dominio y recorrido de la función tal y como ha sido representada?

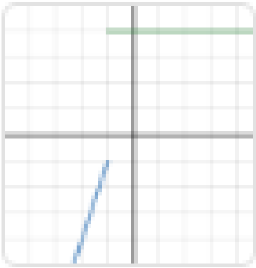
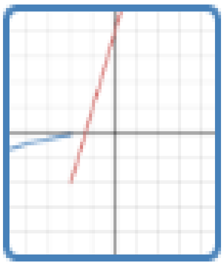
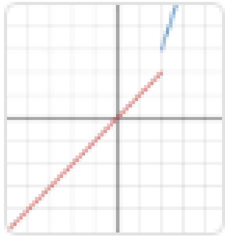
Solución:

Dom f(x) = (4, 20) ó 4 < x < 20

Recorrido = (0, 1000) ó 0 < y < 1000

No entraremos en este apartado si los extremos están incluidos o no.

Problema 10. Por parejas jugaremos a “adivina la gráfica de la función”, para trabajar la traslación verbal a gráfica, y gráfica a verbal. A uno se le darán 6 tarjetas, de las cuales 3 son como las que se muestran en la imagen, y las otras 3, tendrán marcados únicamente los ejes.

Las tres tarjetas en blanco, es para que sean ellos quienes propongan funciones y sea diferente el juego en cada grupo.

1. A uno de los dos se le darán las tarjetas.
2. Quien tenga las tarjetas, se encargará de describirle a su compañero el comportamiento de cada función, empleando términos como, crecimiento, decrecimiento, constante, dominio, salto, recorrido, continua, máximo o mínimo, corte con los ejes, rango, pendiente, etc.
3. Quien escuche la descripción, debe hacer una gráfica aproximada de lo que esté entendiendo.
4. No se podrán dar los pares de puntos de la forma (x, y) ni “cuando x es… y es …”, sí se aceptará “constante k, cuyo Dom es… y su recorrido…”
5. Una vez se hayan descrito todas, se darán 3 tarjetas a quien no haya tenido la oportunidad de describir las funciones, y que sea él quien proponga y describa a su compañero lo que él mismo ha graficado.

Se permitirá un ejemplo antes de empezar, dado que ganará el grupo cuyo más número de tarjetas sea coincidente con la representación del cuaderno de su compañero.

Ejemplo 1 de descripción: Se trata de 2 rectas. La primera no llega a tocar ningún eje, pero si lo tocara, cortaría al eje y en y=1, y al eje x, en x=-0,5, tiene un comportamiento creciente. Cada punto que avanza en x, aumenta 2 alturas en y. el dominio de esta recta es hasta x=-1, donde hay un salto a la segunda recta, que es constante y corta al eje y en y=4, su dominio es a partir de x=-1.

Problema 11. En el parque hay una tienda donde se alquilan patines (0,50€/hora), monopatines (1€/hora) y bicicletas (2€/hora), pero no es obligatorio alquilarlo por horas, puede ser el tiempo que se desee, es decir unos minutos u horas parciales. Mediante el cual se pretende abordar la transformación de la expresión verbal a la expresión tabular, algebraica y gráfica.

a) Enuncia las expresiones algebraicas que relaciona el coste del monopatín, los patines y la bicicleta en función del tiempo. Si te has apoyado en la realización de tablas, exponlas.

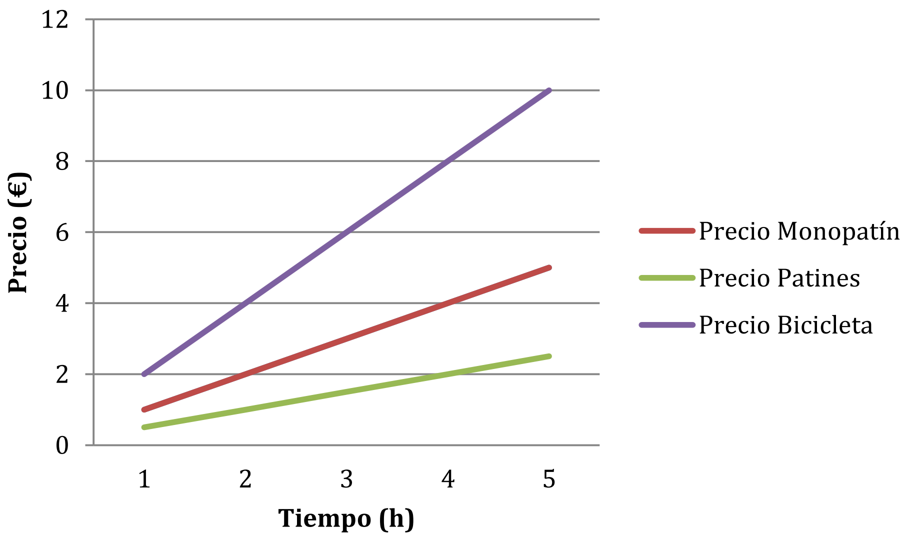
Solución:

Tiempo (h)	Precio (€)		
	Monopatín	Patines	Bicicleta
1	1	0,5	2
2	2	1	4

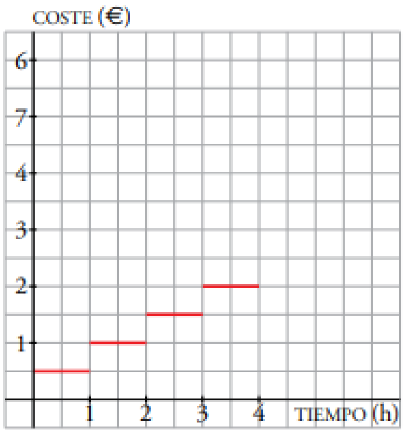
3	3	1,5	6
4	4	2	8
5	5	2,5	10

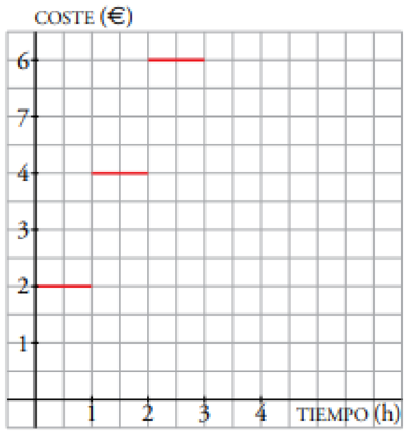
Monopatín: y=x
Patines: y=0,5x
Bicicleta: y=2x

b) Representa en un mismo eje de coordenadas las tres funciones que has enunciado en el apartado anterior.
Solución:



c) Ahora vamos a suponer que el dueño de la tienda alquila por fracciones de tiempo, en este caso, por horas. Por ejemplo, si el tiempo de uso es hasta de 1h, se cobra 1h completa, si te excedes de 1h pero no superas las 2h, cobrará el precio de 2h, y así sucesivamente. En este caso, ¿cómo serían las gráficas correspondientes a los patines y la bicicleta?
Solución:





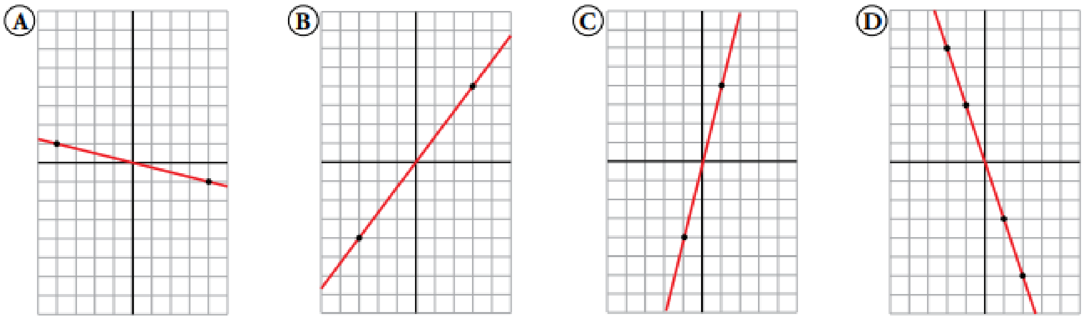
Espero que pregunten, dado que no hemos trabajado las funciones escalonadas o por tramos, al igual que tratar aquí de qué se trata la discontinuidad, en este último apartado lo introduciremos y se alentará a proponer ejemplos de la vida cotidiana, como por ejemplo los tramos de consumo de agua, los caracteres que se pueden poner en un SMS, el tiempo de videos de las stories de instagram, etc.

E.1.4. Transformación de la expresión algebraica a la expresión:

- verbal (interpretación)
- tabular (cómputo)
- gráfica (gráfica)

Problema 12. Asocia cada una de las gráficas la ecuación que le corresponda, para cada caso, realiza una tabla tomando cuatro valores. Mediante el cual se pretende abordar la transformación de la expresión algebraica a la expresión gráfica, pasando previamente por la expresión tabular.

1) $y = 4x$
2) $y = \frac{4}{3}x$
3) $y = -\frac{1}{4}x$
4) $y = -3x$



Solución: 1C, 2B, 3A, 4D

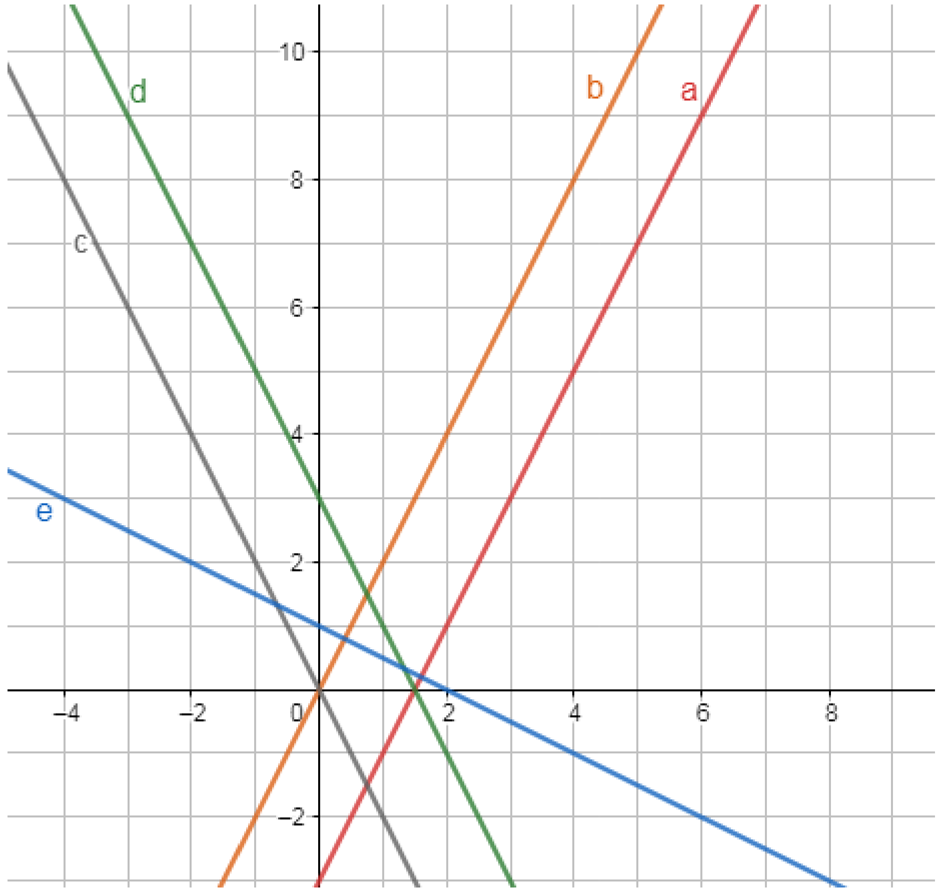
Para la realización de las tablas, se trata de una cuestión de cálculo, lo interesante en este caso, es observar qué cuatro valores han tomado. Lo más sencillo es tomar los valores cercanos a 0, sin embargo, en clase, se ha observado que algunos de ellos eligen valores grandes, como el 10 o el 20, que en el momento de su representación saldría una gráfica que probablemente ocuparía un espacio excesivo en su hoja del cuaderno.

Problema 13. Representa gráficamente con GeoGebra las rectas que se enuncian a continuación, una vez plasmadas, describe con tus propias palabras cuál es su comportamiento y si tienen algo en común, o por lo contrario en qué difieren, tomad como guía las preguntas que se plasman. Por último propón, para cada recta, un ejemplo de la vida real en el que pueda tener dicho comportamiento, empleando por ejemplo distancia de partida y velocidad que tiene una persona al caminar a medida que va pasando el tiempo, comida que hay en un almacén a lo largo de un período de días,…

a) y = 2x - 3
b) y = 2x
c) y = – 2x
d) y = 3 – 2x
e) y = 1 - ½x

¿Qué característica tienen las rectas cuya pendiente es positiva?

¿Qué característica tienen las rectas cuya pendiente es negativa?
¿Cómo son las pendientes de las rectas paralelas?
¿Cómo son las pendientes de las rectas perpendiculares?
Solución:



Dentro de los comentarios de las rectas, me gustaría que dijesen si la tasa de variación es positiva o negativa y dónde corta con los ejes.
La recta *a* tiene una pendiente positiva y corta con los ejes en x=3/2, y en y= -3.
La recta *b* tiene una pendiente positiva y corta con los ejes en el origen de coordenadas.
La recta *c* tiene una pendiente negativa y corta con los ejes en el origen de coordenadas.
La recta *d* tiene una pendiente negativa y corta con los ejes en x=3/2, y en y= 3.
La recta *e* tiene una pendiente negativa y corta con los ejes en x=2, y en y= 1.
Se observa que tanto el par de rectas *a* y *b,* y, *c* y *d*, tienen la misma tasa de variación, sin embargo sabemos que no son la misma, porque tienen puntos de corte de los ejes diferentes.

La recta *e* tiene una tasa de variación inversa y de signo contrario a las rectas *a* y *b*, sin embargo, con este par de rectas forma un ángulo recto.

Los ejemplos que propongan para dar sentido a cada una de las rectas graficadas, pueden ser del estilo: Ana y Benito, contextualizando la función f(x) = 2x – 3 y f(x) = 2x, en el mismo orden, caminan al mismo ritmo, una velocidad de 2m/s. Ana empezó a caminar 3 metros antes de la línea de meta. Donde los metros se corresponden como la variable dependiente, y el tiempo (s) como variable independiente.

E2 Modificaciones de la técnica inicial que van a exigir la resolución de dichos problemas y metodología a seguir en su implementación

Los conceptos y objetivos de esta propuesta se han esbozado ligeramente en los problemas del apartado D3, los cuales se seguirán desarrollando en profundidad y afianzando e integrando tanto el concepto de función, de variable dependiente e independiente, entre funciones polinómicas de primer grado y todo tipo de traslaciones entre diferentes representaciones de las funciones lineales.

Hago hincapié en esto, dada la tendencia de los libros empleados en las clases, a manejar problemas en los que se pretende abordar la transformación de la expresión tabular a verbal, gráfica a verbal y tabular y partiendo de la expresión verbal obtener las expresiones tabular y gráfica, fomentando la mecanización a la hora de tratar un problema, dado que las transformaciones a partir de la expresión gráfica sí que suelen estar, dada la cantidad de problemas, en exceso trabajadas.

Los alumnos van a ir resolviendo la mayoría de los problemas por parejas en el aula y posteriormente alguna de las parejas expondrá la solución, después de haber sido supervisada por la profesora, de esta forma aseguramos la institucionalización de cada una de las técnicas, fomentando el razonamiento en grupos y empleando también herramientas informáticas como GeoGebra, en cuyo caso se realizarán en espacios habilitados para ello, es decir, en el aula de informática, o en el mismo aula en el caso de contar con herramientas como tabletas o portátiles en el aula ordinaria.

Tras cada uno de los problemas se abre un espacio de discusión, y durante la realización de los problemas propuestos la profesora estará disponible para resolver cualquier duda, e incluso señalar un poco el camino o lo que se pretende obtener, siendo siempre los propios alumnos quienes lleguen a la conclusión.

Finalmente, la profesora institucionalizará los conceptos y técnicas que hayan aparecido durante la resolución de los problemas.

F. Técnicas

Como he citado en la página 13, las técnicas asociadas a las traslaciones entre representaciones son coherentes con las traslaciones propuestas por Janvier (1987) y son:

- Representar y leer puntos sobre los ejes de coordenadas.
- Lectura y construcción de una tabla de valores.
- Interpretación de gráficas y fórmulas.
- Boceto de una gráfica a partir de la representación verbal.
- Trazado de una gráfica a partir de la representación tabular.
- Representación gráfica a partir de la representación simbólica de una función.

Vamos a considerar también, las técnicas asociadas a la descripción global de una función:

- Dominio y recorrido, a pesar de no estar incluido en la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, para el curso de 2º de ESO, cuyos contenidos se encuentran en la página 2 de esta memoria.

Dominio de una función es el conjunto formado por los elementos que tienen imagen, para el caso de que se disponga de la representación algebraica, la técnica consiste en encontrar los diferentes valores de la variable independiente que aseguren una sola imagen para determinar el dominio. Cabe remarcar aquí, que durante esta propuesta se tratan única y exclusivamente funciones de primer grado, por lo que los alumnos en la mayoría de los casos se encontrarán con funciones cuyo dominio sean los números reales.

Ahora bien, si la función viene dada por su representación gráfica, la técnica a usar será la de posicionarse en el eje de abscisas y “mirar” tanto hacía arriba como hacía abajo, y verificar que existe o no función.

- Monotonía de la función.

Cuando dispongamos de la representación gráfica, evaluaremos los intervalos de crecimiento, decrecimiento o de valor constante, en principio asociándolos al lenguaje común y después afianzando estos conceptos.

En el caso de las funciones lineales se puede calcular la pendiente de la recta donde la función es creciente o decreciente dividiendo la variación de los valores de la variable dependiente entre la de los respectivos valores de la variable independiente

Para denotar los intervalos se expresará como $a<x<b$ o (a,b)

- Máximos y mínimos absolutos y relativos.

Para determinar los máximos y mínimos, tanto absolutos como relativos, dado el nivel educativo en el que estamos de 2º de ESO, y puesto que todavía no cuentan con recursos suficientes, convendrá que dispongan de la representación gráfica, ya que pueden aparecer en algún momento funciones que no sean monótonas en todo su dominio.

- Continuidad y discontinuidad.

De manera muy intuitiva, introduciremos este concepto ligado a la posibilidad de trazar la gráfica de la función sin levantar el bolígrafo del papel.

En la propuesta pueden aparecer funciones lineales a trozos que presentan discontinuidad en los valores donde se produce el salto.

Y por último, las técnicas asociadas a las funciones lineales o funciones de primer grado:

- Corte con los ejes de coordenadas.

En la representación algebraica se otorgará el valor 0 tanto a la variable dependiente, como a la independiente, para determinar si existe, y en qué punto.

En la representación gráfica, los puntos de corte son visibles según pasen por el eje de ordenadas y abscisas, y aprovechar para definir la ordenada en el origen, como el valor de la función cuando la variable independiente toma el valor cero.

- Cálculo de m y b, en la expresión y = mx + b

La pendiente aparece asociada a la tasa de variación de la función lineal, *m*, y podrá tomar tanto valores positivos como negativos, y a ello está ligado su comportamiento de crecimiento y decrecimiento.

- Rectas paralelas y perpendiculares a una dada

Aquella que tiene la misma pendiente, también denominada recta paralela, a una recta ya conocida, y cuya ordenada en el origen es diferente.

Por el contrario, la recta perpendicular, es aquella cuyo producto de ambas tasas de variación es – 1, es decir, una de las pendientes de este par de rectas es inversa y con signo contrario con resptecto a la pendiente de la recta perpendicular.

F1. Técnicas o modificaciones de una técnica que se ejercitan con ellos

Las técnicas que se han especificado anteriormente están adecuadas a los campos de problemas presentados en este trabajo. Al resolver los problemas propuestos en el apartado E los alumnos pondrán en juego las diferentes técnicas.

En las siguientes tablas se especifica cuáles de ellas son tratadas en cada uno de los trece problemas propuestos.

- Técnicas asociadas a las traslaciones entre representaciones

	Problemas												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Representar y leer puntos sobre los ejes de coordenadas	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Lectura y construcción de una tabla de valores	x		x	x			x	x	x		x	x	
Interpretación verbal de gráficas y fórmulas	x		x	x	x	x	x	x		x			x
Boceto de una gráfica a partir de la representación verbal	x	x	x							x	x		
Trazado de una gráfica a partir de la representación tabular	x						x	x	x		x		
Representación gráfica a partir de la representación simbólica de una función					x							x	x
Modelización de una fórmula a partir de un enunciado	x					x	x	x	x	x	x	x	

- Técnicas asociadas a la descripción global de una función

	Problemas												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Dominio y recorrido	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x

Monotonía de la función		x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x
Máximos y mínimos absolutos y relativos		x				x	x		x				
Continuidad y discontinuidad	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

- Técnicas asociadas a las funciones lineales

	Problemas												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Corte con los ejes de coordenadas					x				x	x		x	x
Cálculo de m y b, en la expresión y=mx+b	x	x		x	x	x		x	x	x	x	x	x
Rectas paralelas y perpendiculares a una dada						x						x	x

F2. Metodología a seguir en su implementación en el aula

Todas las técnicas van a ir apareciendo a lo largo de la secuencia de enseñanza, conforme los alumnos van resolviendo los diferentes campos de problemas.

Comentamos en profundidad la clase introductoria en la que se lleva a los alumnos el juego de "batalla naval", en cuya cuadrícula impresa se establece los ejes con la denominación de ambos ejes, se encargarán ellos mismos de situar sus barcos que cuentas con unas dimensiones dadas y ocuparán cierta área de la cuadrícula.

Por parejas deben adivinar dónde se encuentran los navíos de su adversario para hundir su flota. El tablero se encuentra como anexo, pues ha sido modificad con el fin de familiarizarnos con los ejes de coordenadas, y sus valores, tanto positivos como negativos. De esta forma tendrán que recordar y manejar la notación (x, y).
Con este ejercicio pretendemos alejarnos un poco de la monotonía y la rutina, así *jugando* se establecen las normas, que son las que rigen la lectura de puntos en el plano, posteriormente ponderemos nombre a los ejes, y mencionamos los cuadrantes en que se dividen.

G. Tecnologías

Las tecnologías que vamos a considerar en nuestra propuesta van a hacer referencia a las justificaciones de la descripción global de una función y a las justificaciones de las representaciones de la función polinómica de grado uno.

G1. Razonamientos que justifican las técnicas

Partimos de la definición de función lineal, o de primer grado, que es aquella que se corresponde con una recta monótona cuya pendiente es m y tiene punto de corte con los ejes.

Descripción global de la función:

- Dominio y recorrido, el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (x) es el dominio. El recorrido es el rango de valores que toma la variable dependiente (y). En el caso de todas las rectas que no estén acotadas, su dominio y recorrido se corresponderá con el conjunto de los números reales.

- Monotonía, como aquellas funciones que conservan la tasa de variación o pendiente, es decir, que son crecientes, decrecientes o constantes en todo su dominio.

- Máximos y mínimos relativos y absolutos, los puntos, como su nombre indica, son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos), que toma una función en un punto situado, ya sea dentro de una región en particular o en el dominio de la función, siendo los valores absolutos enontrados cuando se observa el comportamiento de f(x) en su dominio.

- Continuidad y discontinuidad, empleamos una definición informal dado que la propuesta se desarrolla en un aula de 2º de ESO, se dice que una función es continua si al trazar su gráfica no es necesario separar el lápiz de la hoja, así pues las discontinuas son aquellas en las que existen saltos (separación del lápiz del papel para seguir a partir de otro punto).

Funciones lineales:

- Corte con los ejes, se estudia el corte con los ejes, sustituyendo en la representación algebraica $y=mx+b$, con y=0, dando el punto en el que la función pasa por el eje x, y haciendo x=0, se obtiene el punto en el que la función pasa por el eje y.

- Calculo de la pendiente y la ordenada en el origen, m, viene dada por la expresión $m=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$. Para el cálculo de la ordenada en el origen, b solo hace falta sustituirlo en la expresión $y = mx + b$; siendo $b = y_1 – mx_1$

- Rectas paralelas y perpendiculares, son paralelas cuando su pendiente o tasa de variación es la misma, independientemente del valor que esté dado a la ordenada en el origen. Son perpendiculares cuando su tasa de variación es de signo contrario e inversa, es decir una recta con m como pendiente, y su perpendicular con $-1/m$ como tasa de variación.

G2. Responsabilidad de justificar las técnicas y proceso de institucionalización

Las técnicas se justificarán por el profesor/a, y mediante la presentación y realización de los problemas se irá institucionalizando todos y cada uno de los distintos aspectos del objeto matemático que se ha desarrollado a lo largo de los problemas, quedando reflejadas en las tablas del apartado F1 qué técnicas son las que se trabajarán, siguiendo exactamente la metodología descrita en los campos de problemas.

H. Secuencia didáctica y su cronograma

Sesión 1	Actividades para evaluar y practicar los conocimientos previos
Sesión 2	Presentación de la razón de ser a través de los problemas 1 y 2
Sesión 3	Campo de problemas E. 1.1. Problemas 3 y 4
Sesión 4	Campo de problemas E. 1.1. Problemas 5 y 6
Sesión 5	Campo de problemas E. 1.2. Problemas 7 y 8

Sesión 6	Campo de problemas E. 1.3 y E.1:4. Problemas 9 y 10
Sesión 7	Campo de problemas E. 1.4. Problemas 11 y 12
Sesión 8	Problema 13 y repaso
Sesión 9	Prueba escrita
Mitad de la sesión 10	30 minutos para corregir la prueba escrita

Sesión 1. Con el afán de verificar que los alumnos poseen los conocimientos previos y detectar carencias. Se propondrán y resolverán en el aula las actividades propuestas en el apartado C3 de esta memoria. A cada una le dedicaremos 20 minutos aproximadamente. Así, habremos afianzado el reconocimiento de las variables, la graduación de los ejes, la identificación de los puntos en una gráfica y la introducción a la construcción de gráficas a partir de tablas.

Sesión 2. Al proponer la resolución de los problemas 1 y 2 pretendemos presentar a los alumnos los objetivos a alcanzar durante esta unidad didáctica, de esta manera podrán plantear dudas generales o exponer las dificultades que encuentran. Es interesante remarcar que en el primer problema ya tienen su primer acercamiento a lo que es una variable continua.

Cabe remarcar aquí, la importancia de poder determinar ci una variable en continua o no, depende de la naturaleza de lo enunciado, y realizar una recta continua, o más bien, manejarla como puntos aislados o línea de tendencia.

A partir de las siguientes sesiones, es de importancia mencionar que aunque esté estipulado, no es posible asegurar de que así se vaya a realizar, pues el tiempo es aproximado y depende de la clase en general, así que si en alguna, o en todas, no fuera posible la realización y finalización de los problemas, se dejarán como actividad a realizar en casa, y por supuesto, en la siguiente sesión se retomaría, para resolver el problema en el aula.

Sesión 3. En esta sesión es muy importante la introducción y observación de las escalas empleadas en cada uno de los ejes, pues como se ha mencionado, a través del manejo que se dé se condiciona al lector hacía una u otra “opinión”, y digo “opinión”, dado que el uso de determinadas escalas da lugar a gráficas de lectura engañosa.

Sesión 4. Gracias al problema 6 tendrán los alumnos el primer contacto con una gráfica que presenta saltos, y que además las tres rectas son paralelas, siendo esta su primera aproximación a la definición de rectas paralelas que serán más adelante trabajada en mayor profundidad.

Sesión 5. Sesión en la que trabajaremos las transformaicones de la expresión tabular a otras.

Sesión 6. Trabajaremos las transformaciones de la expresión verbal a otras. Y en el problema 10, prestaremos atención a la capacidad descriptiva con el vocabulario específico y propio del objeto que se está estudiando.

Sesión 7. Al resolver el problema 11 aparecen en esta sesión las gráficas escalonadas, y funciones constantes.

Sesión 8. Finalizando con una clase de uso de GeoGebra, para modelar las expresiones algebraicas dadas y relacionar con este comportamiento alguna situación de la vida real, representa un esfuerzo adicional esta capacidad de identificar una situación real como una función.

La sesión 9 se dedicará a realizar el examen o prubea escrita, y la sesión 10 a corregir el examen en el aula.

I. Evaluación

Los campos de problemas que se trabajan en cada uno de los ejercicios que componen esta prueba escrita y sus técnicas quedan definidas a continuación:
Campos de problemas:

- Problema 1, transformación de la expresión verbal a la expresión gráfica, tabular y algebraica.
- Problema 2, transformación de la expresión gráfica a la expresión verbal.
- Problema 3, transformación de la expresión algebraica a la expresión verbal.
- Problema 4, transformación de la expresión gráfica a la expresión verbal y algebraica.

Técnicas:

- Técnicas asociadas a las traslaciones entre representaciones

	Problemas			
	1	2	3	4
Representar y leer puntos sobre los ejes de coordenadas	x	x	x	x
Lectura y construcción de una tabla de valores	x	x		
Interpretación de gráficas y fórmulas		x	x	x
Boceto de una gráfica a partir de la representación verbal		x		
Trazado de una gráfica a partir de la representación tabular	x			
Representación gráfica a partir de la representación simbólica de una función			x	
Modelización de una fórmula a partir de un enunciado	x			x

- Técnicas asociadas a la descripción global de una función

	Problemas			
	1	2	3	4
Dominio y recorrido	x	x	x	x
Monotonía de la función	x	x	x	x
Máximos y mínimos absolutos y relativos				x

Continuidad y discontinuidad	x	x	x	x

- Técnicas asociadas a las funciones lineales

	Problemas			
	1	2	3	4
Corte con los ejes de coordenadas	x		x	x
Cálculo de m y b, en la expresión y=mx+b	x	x	x	x
Rectas paralelas y perpendiculares a una dada	x			x

Las tecnologías quedan asociadas a la definición de las técnicas, que ha sido desarrollado en el apartado G1 de esta memoria.

En cada problema se detallan los estándares de apredizaje evaluables, las soluciones y los criterios de calificación, siguiendo el modelo de tercios de Gairin, Muñoz y Oller (2012).

1. Telefonía S.A. ha hecho un estudio de mercado sobre el precio del minuto de llamada a móviles nacionales, que establecen los diferentes locutorios de la ciudad, traemos el precio de tres de ellos. (3 puntos)
   a) En la zona Universitaria el precio es de 15 ct/min
   b) En la zona de Patio Bonito es de 20 ct/min
   c) En la zona de Santa Bárbara el precio es de 30 ct/min

a) Halla las expresiones algebraicas que relaciona el precio con los minutos en cada zona. Apóyate en la realización de una tabla. (1,3 puntos)

Solución:

Tiempo (min)	Precio (€)		
	Universidad	Patio bonito	Sta Bárbara
1	0,15	0,20	0,30
2	0,30	0,40	0,60
3	0,45	0,60	0,90
4	0,60	0,80	1,20
5	0,75	1	1,50

La función precio por minuto hablado en la zona:

- Universidad: y=0,15x
- Patio Bonito: y=0,2x
- Sta Bárbara: y=0,3x

Est.MA.4.4.1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente

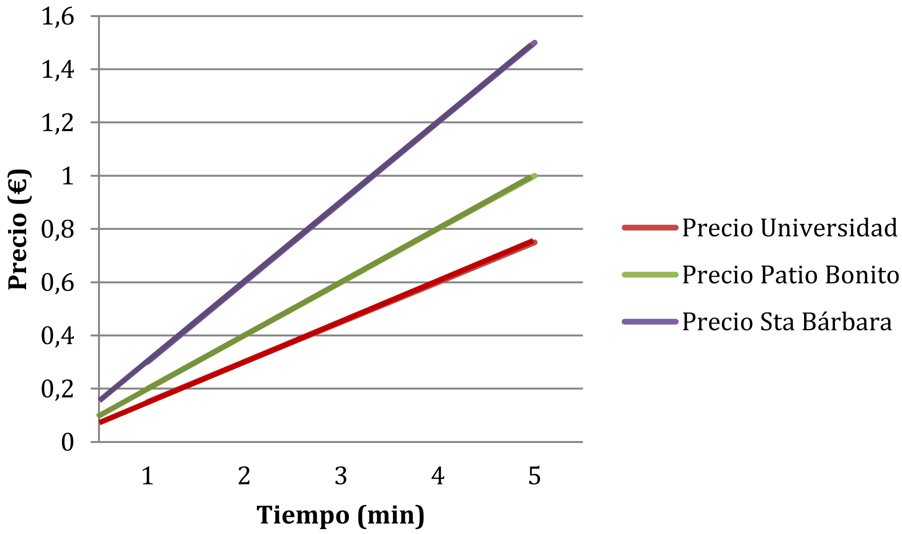
Est.MA.4.4.2. Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o tabla de valores.

Tarea principal	Construcción de una tabla de valores	0,8 puntos
Tarea auxiliar principal	Identificación de la pendiente	0,3 puntos

Tarea auxiliar	Cálculos aritméticos	0,2 puntos

b) Representa en un mismo eje de coordenadas las tres funciones que has enunciado en el apartado anterior. (0,7 puntos)

Solución:

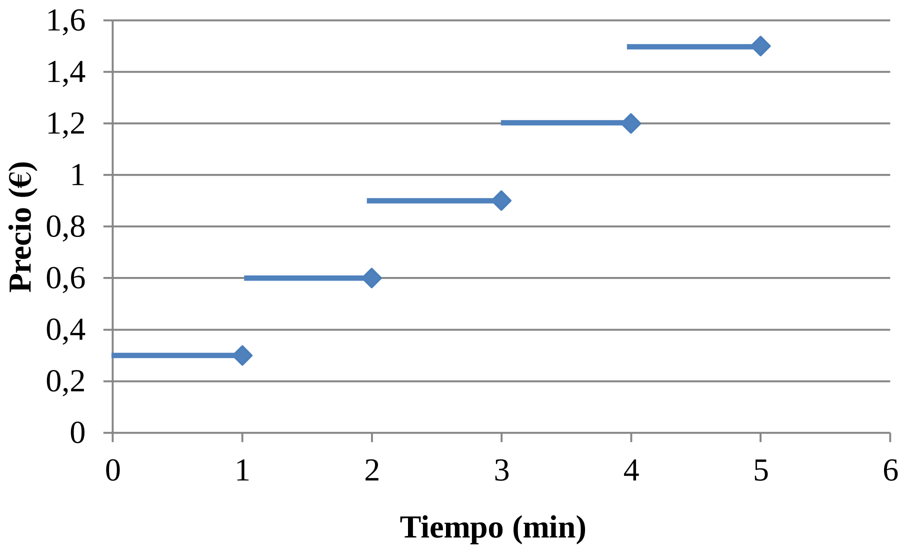


Est.MA.4.4.1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente

Tarea principal	Trazado de una gráfica a partir de la representación tabular	0,2 puntos
	Representación de puntos sobre los ejes de coordenadas	0,3 puntos
Tarea auxiliar principal	Determinación de la continuidad de la función	0,2 puntos

c) Ahora vamos a suponer que en cada locutorio cobran por minutos completos, es decir, si algien ha hablado menos de 1 min se le cobra el minuto completo, si habla entre 1min y 2 min, cobrarán el precio de 2 min, si se pasa de los 2 min pero no alcanza al minuto 3, le cobrarán 3 minutos, así sucesivamente. ¿Cómo es ahora la gráfica en el caso de la zona de Santa Bárbara? (1 punto)

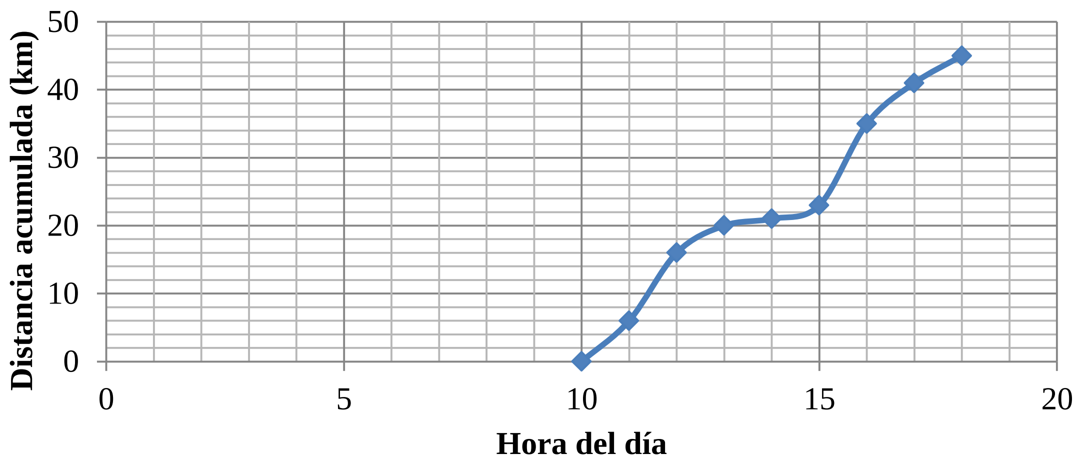
Solución:



Est.MA.4.2.1. Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto.

Tarea principal	Trazado de una gráfica a partir de la representación verbal	0,4 puntos
	Representación de puntos sobre los ejes de coordenadas	0,3 puntos
Tarea auxiliar principal	Determinación de la continuidad de la función	0,3 puntos

2. Una repartidora de glovo o deliveroo, Natalia, que hace todos sus recorridos en bicicleta ha extraído del registro de su móvil, la distancia que ha ido recorriendo acumulativamente, según ha ido trabajando. La gráfica resultante es la siguiente: (2 puntos)



a. Narra lo que crees que Natalia ha podido hacer a lo largo del día. (1 punto)
Solución:
Natalia ha empezado a trabajar a las 10 de la mañana, y ha trabajado hasta las 6 de la tarde. A partir de las 10 y hasta las 13 ha tenido pedidos en los que ha debido realizar mayor desplazamiento, sin embargo entre las 13 del medio día y las 3 de la tarde parece o que no ha tenido muchos pedidos o que el lugar de recogida y el de entrega estaban muy cerca.

Desde las 3 de la tarde se ha activado el pedido, pues coincide también con la hora de la comida, y se ha mantenido así hasta casi la hora de la merienda, las 6 de la tarde.

Tarea principal	Interpretación de gráficas	0,7 puntos
	Dominio y recorrido	0,3 puntos

Est.MA.4.1.1. Localiza puntos en el plano a partir de sus coordenadas y nombra puntos del plano escribiendo sus coordenadas.

Est.MA.4.3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características.

b. ¿En qué tramo de una hora trabajó más Natalia?¿Cómo lo has determinado?
(1 punto)

Solución:
Natalia ha recorrido mayor distancia en el tramo de las 15h a las 16h, dado que la pendiente en ese tramo es mayor, es decir, más pronunciada.

Tarea principal	Interpretación de gráficas	0,5 puntos
Tarea auxiliar principal	Identificación de la pendiente	0,5 puntos

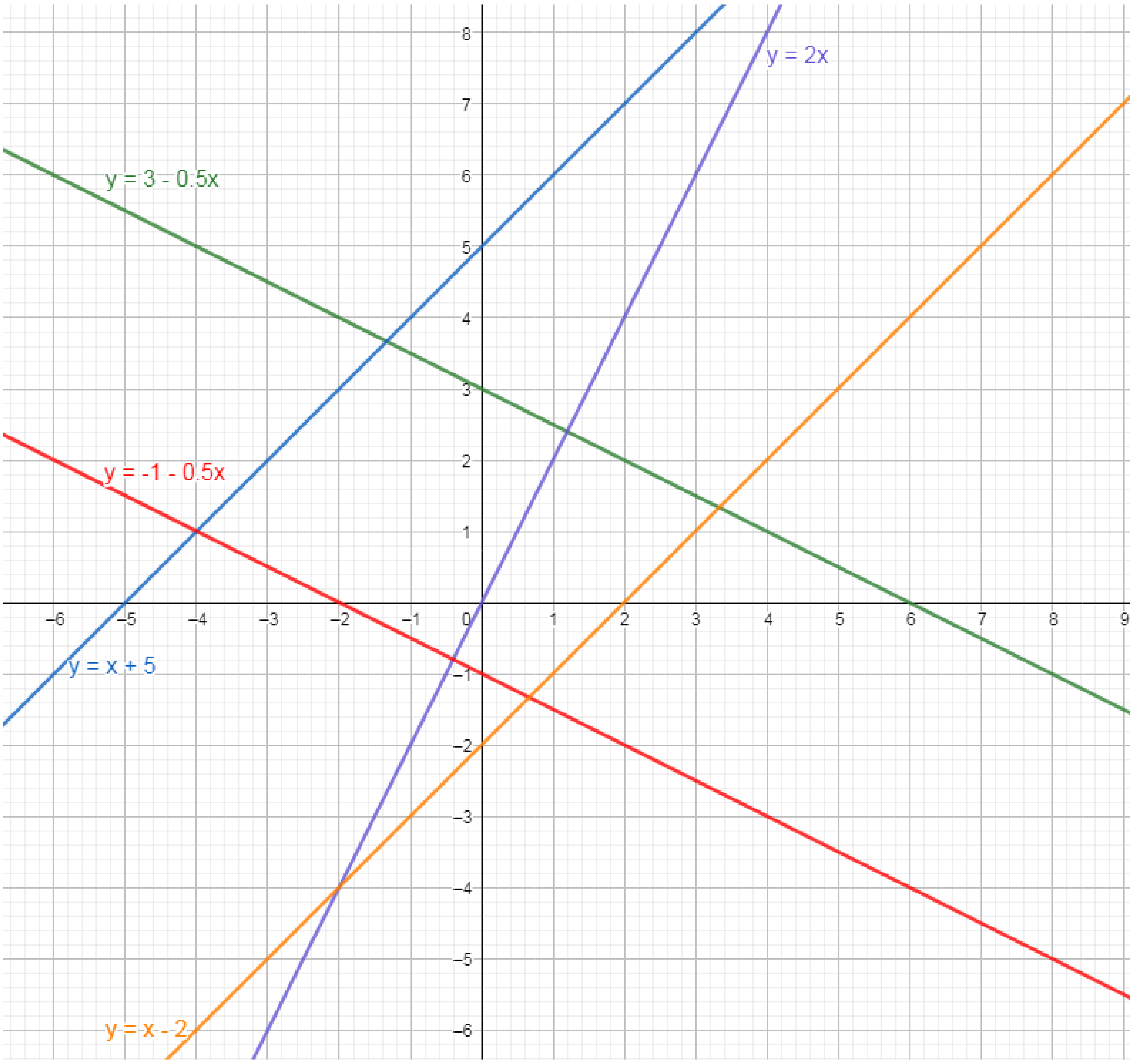
Est.MA.4.4.1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.

3. Representa, sobre el mismo eje de corrdenadas, las siguiente cintos rectas:
(2 puntos)
   a) y = 3 – 0,5x
   b) y = x + 5
   c) y = 2x
   d) y = -1 – 0,5x
   e) y = x – 2

   Solución: (1 punto)

Est.MA.4.4.1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.

Tarea principal	Construcción de una tabla de valores	0,2 puntos
	Trazado de una gráfica a partir de la representación algebraica	0,5 puntos
Tarea auxiliar principal	Representación de puntos sobre los ejes de coordenadas	0,3 puntos



a. Describe si existe entre ellas algún tipo de relación, crecimiento y decrecimiento, pendiente, ordenada en el origen, perpendicularidad o paralelismo, ¿entre cuáles? (1 punto)

Solución:

Todas las rectas cuya pendiente es mayor a cero tienen una tendencia creciente, por el contrario, las dos que tienen una pendiente de signo negativo, son decrecientes.

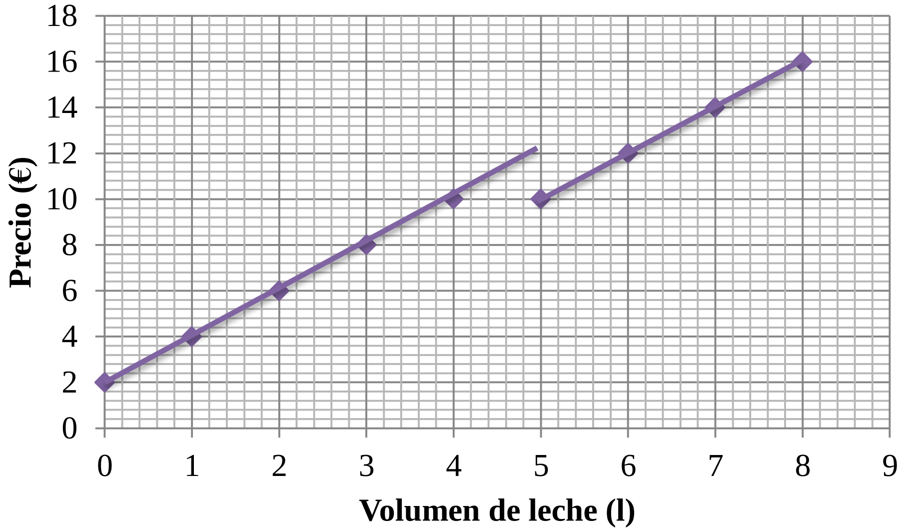
El par de rectas que tienen la misma pendiente m = 1, y m= -0,5, son paralelas entre sí mismas.

La recta cuya pendiente m = 2, es perpendicular a las dos rectas que tienen pendiente m = -0,5.

Est.MA.4.3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características.

Tarea principal	Identificación de rectas paralelas y perpendiculares	0,7 puntos
Tarea auxiliar principal	Determinación del corte con los ejes	0,3 puntos

4. Hemos llamado a una granja lechera, venden leche fresca a domicilio dentro del mismo pueblo, 2€ cada litro de leche. Nos han dicho que si el volumen que se solicita no llega a cinco litros cobran 2€ por la salida al domicilio, también nos han advertido que no vende más de 8 litros por cliente, presentamos a continuación la gráfica: (3 puntos)



Est.MA.4.1.1. Localiza puntos en el plano a partir de sus coordenadas y nombra puntos del plano escribiendo sus coordenadas.

Est.MA.4.4.3. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal existente entre dos magnitudes y la representa.

Est.MA.4.3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características.

a) Determina el dominio y el recorrido de la función. (0,5 puntos)
Solución:
Dom f(x) = (0, 8) ó $0 < x < 8$
Recorrido = (2, 16) ó $2 < y < 16$

Tarea principal	Determinar dominio y recorrido	0,5 puntos

b) ¿Crees que podría pedir 4,5 litros? De ser afirmativo, ¿cuánto costaría? ¿Cuánto cuesta pedir 6 litros? (0,4 puntos)
Solución:
Sí, podría pedir 4,5 litros por un precio de 11€
6 litros de leche por 12€

Tarea principal	Interpretación de la gráfica	0,2 puntos
	Lectura de puntos	0,3 puntos

c) ¿Varía el precio del litro de leche a partir de algún volumen? (0,4 puntos)
Solución:
No, el precio del litro se mantiene igual.

Tarea principal	Interpretación de la gráfica	0,5 puntos

d) Obtén la ecuación de cada una de las rectas que marca el precio del pedido. ¿Tienen alguna característica en común? (0,7 puntos)
Solución:
Para el primer tramo, y = 2x + 2, cobran el domicilio
Para el segundo tramo, y = 2x, no cobran el domicilio
La pendiente es la misma, así que este par de rectas son paralelas una con respecto de la otra.

Tarea principal	Modelización de una fórmula a partir de la gráfica	0,2 puntos
Tarea auxiliar principal	Identificación de la pendiente	0,3 puntos
	Determinación de la ordenada en el origen	0,2 puntos

e) Describe el comportamiento de la representación gráfica, teniendo en cuenta el crecimiento, decrecimiento, corte con los ejes, continuidad, discontinuidad, máximos y mínimos relativos y absolutos. (1 punto)
Solución:
En todo su dominio se trata de una gráfica creciente, que corta el eje en y=2, presenta un salto, por lo que existe discontinuidad en x=5. Tiene un mínimo absoluto en x=0, máximo absoluto en x= 8, en x=5 existe un salto en el que se presentan ambos, máximo y mínimo relativo.

Tarea principal	Descripción verbal con vocabulario específico	0,3 puntos
	Identificación de la pendiente	0,1 puntos
	Determinación de la ordenada en el origen	0,1 puntos
	Identificación de paralelismo	0,5 puntos

J. Bibliografía

Azcárate, C., y Deulofeu, J. (1998). Guías Praxis para el profesorado de ESO. Matemáticas. Contenidos, Actividades y Recursos. Barcelona: Praxis S.A.

Boyer, C. (1986). Histotia de las Matemáticas. Madrid: Alianza Universidad.

Burgos Navarro, M. y Flores Martínez, P. (2017). Reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas en la enseñanza de las funciones. Épsilon - Revista de Educación Matemática (97), 65 - 74.

Cólera, J., y Gaztelu, I. (2003). Educación Secundaria 2. Matemáticas. En J. Cólera, y I. Gaztelu, Educación Secundaria 2. Matemáticas (págs. 244-261). Valdemoro (Madrid): ANAYA.

Corbalán, F., Álvarez, J. L., Fernández-Aliseda, A., González, A. E., Hans, J. A., Muñoz, J., y otros. (2003). Alfa 2 Matemáticas. En F. Corbalán, J. L. Álvarez, A.

Fernández-Aliseda, A. E. González, J. A. Hans, J. Muñoz, y otros, Alfa 2 Matemáticas (págs. 198-253). Barcelona: Vicens Vives.

Deulofeu, J. (2003). Las funciones en la educación secundaria ¿para qué?, ¿cómo? Aportaciones de la investigación. X JAEM, (págs. 367-377).

ECD/489/2016, O. (26 de Mayo de 2016). Gobierno de Aragón. Obtenido de Departamento de educación, cultura y deporte: http://www.educaragon.org/HTML/carga_html.asp?id_submenu=60

Ferro, P., Álvarez Gascón, M., & Manguan Esteban, S. (2016). Matemáticas 2 ESO. Bloque II: Geometría. Funciones. Estadística y probabilidad. En P. Ferro, M. Álvarez Gascón, y S. Manguan Esteban, Matemáticas 2 ESO. Bloque II: Geometría. Funciones. Estadística y probabilidad. (págs. 289-317). Barcelona: EDEBÉ.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM

Pérez, M. A. (2013). Una historia de las matemáticas: Retos y conquistas a través de sus personajes. En M. A. Pérez, Una historia de las matemáticas: Retos y conquistas a través de sus personajes (págs. 16-41). Madrid: Visión Libros.

Shell Centre of Mathematical Education. (1985). The language of functions and graphs. Manchester: Join Matriculation Board.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. Recherches en Didactiques des Mathematiques, vol. 6.1. 5 - 67.

Sierra Vázquez, M., González Astudillo, T., y López Esteban, C. (1998). Funciones: Traducción entre representaciones. En Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales. (págs. 89 - 104). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Vizmanos, J., Anzola, M., Peralta, J., y Bargueño, J. (2002). Matemáticas GAUSS 2º secundaria. En J. Vizmanos, M. Anzola, J. Peralta, & J. Bargueño, Matemáticas GAUSS 2º secundaria (págs. 146-161). Getafe: SM.

Youchkevitch, A. (1976). The concept of function up to the middle of the XIX Century. Arch. For Hist. of Exact Sciences, 6.